现代图论基础

现代图论基础

[日] 前田 渡 伊東正安 共著
陶思雨 王鲜忠 合译

高等教育出版社

内容简介

本书介绍了图论的基础知识及其主要应用。全书共分八章，分别介绍图的概念、图论的一般应用，图的定义和基本性质，路径和割集、关联矩阵和割集矩阵，回路的诸性质图论在电路方面的应用，连接矩阵以及用连接矩阵分析开关电路，用图求解联立方程的方法及图论在系统控制方面的应用；逻辑电路的图论解析等。此外，有三个附录，汇集了本书所使用的线性代数、排列与组合、布尔代数等公式。书后还有习题详解。

本书阐述详细、通顺，可作为电工、电子技术、通讯、数理信息、电子计算机工程、管理工程、系统工程等专业学生的参考书，也可作为有关领域技术人员的自学读物。

责任编辑　王忠民

现代图论基础

[日] 前田　渡　伊东正安　共著

陶思雨　王舞嘉　合译

•

高等教育出版社出版

新华书店上海发行所发行

祝桥新华印刷厂印装

•

开本 850×1168　1/32　印张 8.875　字数 210,000

1987年3月第1版　1987年3月第1次印刷

印数 00,001—4,610

书号 15010·0846　定价 2.00元

序　言

所谓图，通常是指用点和线表示的线状图。图论，就是研究这种点和线的联接关系的学问。图不仅是处理和表达问题的一种手段，而且在现代理、工科领域中已成为对具有系统功能的模型进行分析与设计等不可缺少的理论。

图论的主要应用，若举例来说，与电子学有关的，有复杂的电子线路[如大规模集成电路(LSI)等]的分析与设计，印刷电路板的设计与布线，逻辑电路的分析与故障诊断等，以及电子计算机应用程序的研制；在系统及控制方面，用信号流图分析是有效的；在传送网与通讯网方面，要用到割集的概念。

另一方面，就社会上来说，交通、通讯、医疗、教育、流通机构等各种各样系统，都朝着大规模和复杂化的趋向发展，作为处理这些问题的新的科学方法——图论的研究法正在受到重视。此外，图论还应用于政治、经济、心理、语言等方面，适用的范围极其广泛。

图论的历史之长，出乎意料。它起源于1730年的"哥尼斯堡桥的问题"。这是个数学难题。所以即使从图论的发展过程来看，它与数学的关系也非常之深。在本书中也将学习关于欧拉图、一笔画问题、图与线性代数等图论的有关知识。

考虑到上述这些情况，本书对于基础图论及其主要应用给予通顺易懂的阐述，以期作为电工、电子技术、通讯、数理信息、电子计算机工程及管理、系统工程等专业学生的教科书，也可兼作有关领域技术人员的自学读物。

本书的结构，在学习图论的基础知识方面所必需的概念和应用是按章展开的，尽力使读者能够充分理解这些内容。特别是在讲

解上下功夫，使初学者也有兴趣而喜爱学习。所选例题是按逐步加深理解的顺序来安排的。因此，读者将能体会图论的妙趣。

在第一章的绪论中，从我们周围的图的表现开始，介绍图的概念和图论的应用。第二章引出图的定义和简单的性质。第三章定义路径和割集，学习关联矩阵和割集矩阵等用矩阵表示图的方法，说明作为割集应用之例的通讯网络。第四章论及回路的诸性质，特别是割集与回路的正交性，解决根据欧拉图得出的一笔画问题。第五章是关于在电路方面的应用。第六章是关于行列式的展开和用相应的连接矩阵分析开关电路。第七章学习用图求解联立方程的方法，并且论述在系统控制方面的部分应用。第八章论述逻辑电路的图论解析。

为方便读者，在附录中汇集了本书所使用的线性代数、排列与组合、布尔代数等公式。在一本书中全部包罗图论及其应用是不可能的，还因为本书题材所限，所以对于想进一步深入学习的读者，可阅读章末所列的适当的参考书和文献。

读者假如能通过本书对图论的基础有较好掌握，并进一步加深对高深理论的兴趣和加强对应用的关心，将会感到满意。我们期待着，由于图论引起了认识上的飞跃，能够借助图论解决具体问题的日子将早日到来。

作　者

1978年10月

符 号 表

符号	含义
G	图
H	图G的子图
H^c	子图H的补图（即 $G-H$）
$G_{(ij)}$	把G的顶点i和j短接后所得的图
$G(\overline{P}_1)$	从G中把路径P_1及联接在P_1上的边全部去掉后所得的图
P_i	路径
(a, b, c)	由边a、b、c组成的路径
$((a)(b)(c))$	路径(a, b, c)中边的加权的总乘积
$[a, b, c]$	由边a, b, c组成的回路
$[(a)(b)(c)]$	回路$[a, b, c]$的边的加权的总乘积
C_i	关于补树的连支i的基本回路
T	树
T^c	补树
T_2	2-树
Q	割集(或互质割集的并集)
$r(G)$	图的秩
$\varphi(G)$ 或 φ	图的连通片的个数
$n(G)$	图的零度
n	图的顶点(节点)数,参考点
b	图的边数
f	平面图的区域数
$d(v_i)$	顶点v_i的次数
$d^+(v_i)$	顶点v_i的出次数
$d^-(v_i)$	顶点v_i的入次数
Ω	顶点的集合
$E(\Omega_1\times\Omega_2)$	连接Ω_1的顶点与Ω_2的顶点的边集合
G^*	平面图G的对偶图
$\mathcal{Z}$	2-同构
D_m	全顶点循环(P-集循环)
L_m	没有共同顶点的m个顺向回路中全部边的加权的乘积
A_a, A	关联矩阵,基底关联矩阵
Q_a, Q	割集矩阵,基底割集矩阵
B_a, B	回路矩阵,基底回路矩阵
B_f	基本回路矩阵
T	端子间容量矩阵
t_{ij}	顶点i, j间的端子间容量
C	连接矩阵
I_e	支路电流向量,即 $I_e=[i_1, i_2, \cdots, i_b]^t$
V_e	支路电压向量,即 $V_e=[v_1, v_2, \cdots, v_b]^t$
V_n	相对于参考点(例如节点n)的节点电压向量,即 $V_n=[v_{1n}, v_{2n}, \cdots, v_{n-1,n}]^t$
J_s, J	电流源(或等效电流源)的电流向量
E_s, E	电压源(或等效电压源)的电压向量
Y	节点导纳矩阵
Z_l	回路阻抗矩阵
$G_1\cup G_2$	表示G_1与G_2并集的图
$G_1\cap G_2$	表示G_1与G_2交集（公共部分）的图
G_1-G_2	不属于G_2而由G_1的元素组成的图
$G_1\oplus G_2$	$G_1\cup G_2-G_1\cap G_2$

目　录

第一章 何 谓 图 论

【要点】 什么是图？图论的应用范围又大概怎样？在我们的周围，巧妙地利用点和线表示了各式各样的图。首先我们将通过一些例子观察这些图，讲述图在现今应用的成效。再者，本章出现的有关图论的基本术语，在第二章以后还将进一步加以阐明。

1.1 在我们周围图的表示

我们经常看到，导游图、铁路和公路的路线图、系统图和流程图等都是用图形表示的。这些图形都以某种形式简捷地表现其对象的本质和关键，从而让人们通过观察，能很好地了解该图所表示的事物。

[1] 何谓图

我们的周围，除上述图形外，还有家谱图和工序图；稍微专门一些，并被广泛地使用着的，则有电路接线图、自动装置和语言的文法结构图等。这些图都是由用点和线组成的图形将“关系”、“连接”、“顺序”等概念变成为模型。图 1.1 是某航空公司的主要航空路线图。图 1.2 是语言的模型图，若沿着一条从始点到终点的路线循行，就得到一句话(例如，“The man was there”，“The old men were there”等)。图 1.3 是把自然数从 1 到 10 相加，求其总和的程序图。图 1.4 是自动装置理论中经常出现的状态转换图的例子。图 1.5 是表示甲烷族碳氢化合物（链烷属烃）的分子符号

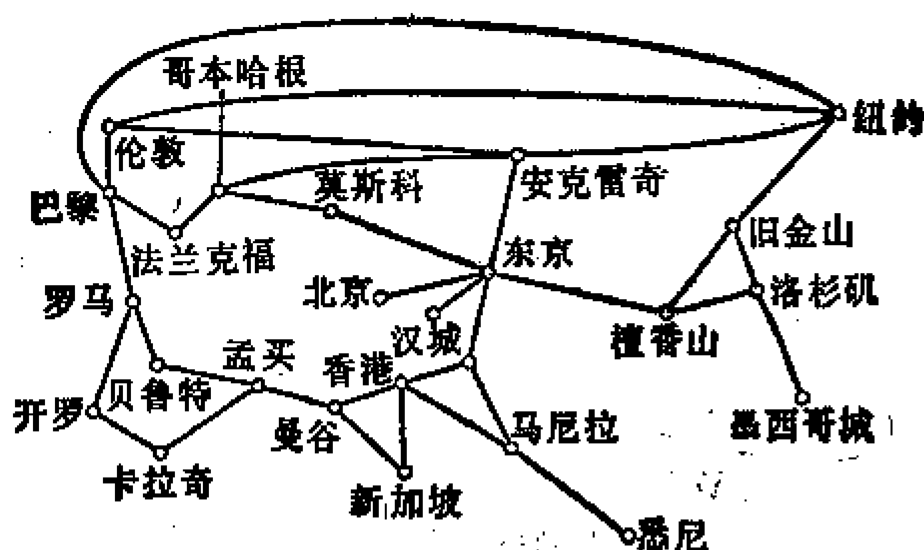


图 1.1　航空路线图的一例

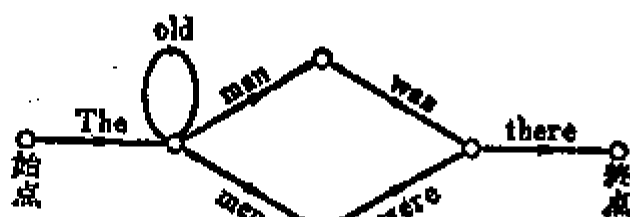


图 1.2　语言模型

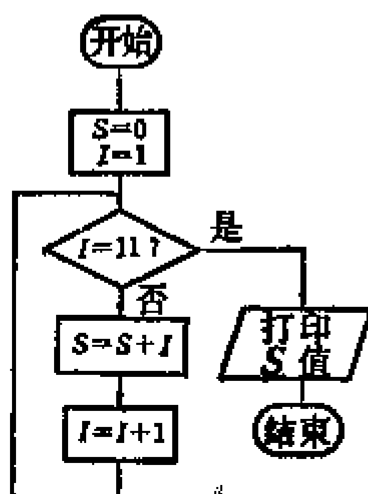
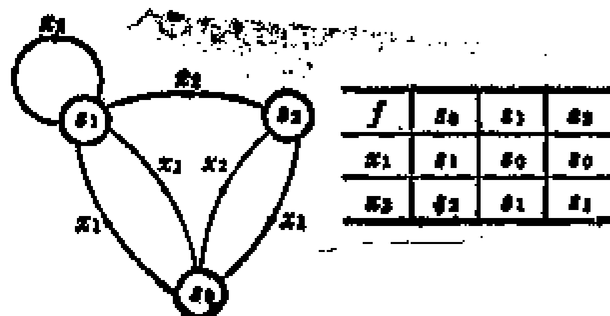


图 1.3　$\sum_{i=1}^{10} i$ 的程序框图



f	s_0	s_1	s_2
x_1	s_1	s_0	s_0
x_2	s_2	s_1	s_1

图 1.4　自动装置的图表

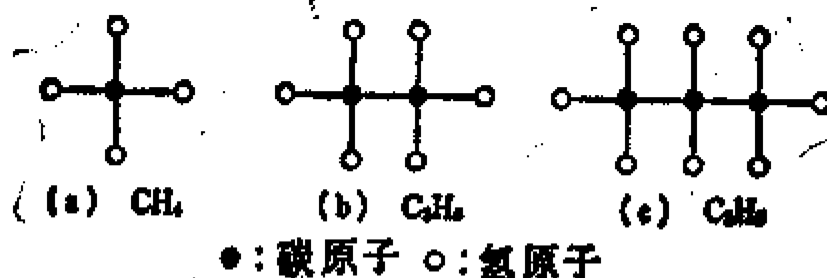


图 1.5　甲烷族碳氢化合物(C_kH_{2k+2})的分子符号

C_kH_{2k+2} 的图，其中，点表示碳原子和氢原子，线表示它们的结合。图 1.6 是我们经常用的网格梳形图的例子，这也是巧妙地使用分岔线的一种图的表示方法。

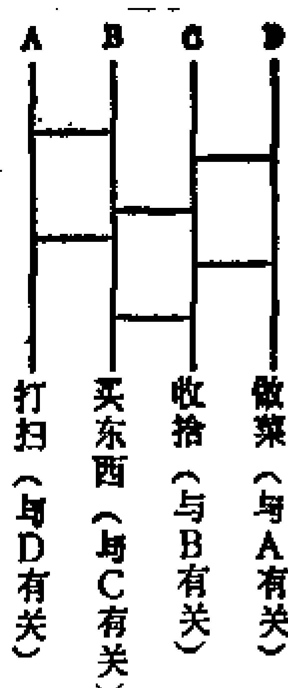


图 1.6　网格梳形图的例子

用“点和线”表示上述这些问题和系统的线图，一般就叫做图。一说到图，可能会立即联想到直线和曲线等函数图，但那些图与本书所说的图不同，前者表示量的关系，后者主要表示联接关系。

用图表示系统与信息等比较直观、清楚，即使作为简单的整理方法，也是非常有效的。不仅如此，从图的自身性质，还可探索出系统与信息的内在性质。因此，图论不仅应用于电工、电子和信息工程方面，而且在处理物理、心理、社会等系统方面的所有领域都有广泛应用。

[2] 图的点和线及图的方向性

上面说过，图就是用点和线表示的线图。这里所说的点，就是表示某种确定事物的点，叫做顶点。两个顶点间的连线叫做边。顶点和边的集合就是图。全部边都具有方向的图叫做有向图，边上没有方向的图叫做无向图。

以道路为例，它可以用有向图表示。如单向通行的道路，其岔口用顶点表示，单行道用有向边表示；对于双向通行的道路，则用方向相反的两条有向边并联。就公共汽车路线图来说，由于停靠站是主要的，所以经常用以车站和停靠站作为顶点的无向图来描绘。另外，对于单环行的汽车路线图，则用环状的有向图表示。

1.2 图论的起源——哥尼斯堡桥与四色问题

图论的起源也被说成"哥尼斯堡桥的问题"。从前，在流经哥尼斯堡城(现在叫加里宁格勒)的普雷格尔(Pregel)河上架设有七座桥，使两个小岛和城市连接。问题是，如果每座桥只通过一次，要走遍七座桥(图 1.7)是否可能？欧拉(L. Euler*1) 证明了这个问题，结论是不可能的。这个问题相当于"一笔画问题"。按照这样的思想，从任一点出发，最后又回到原来的出发点，能够一笔画出的图称为欧拉图。

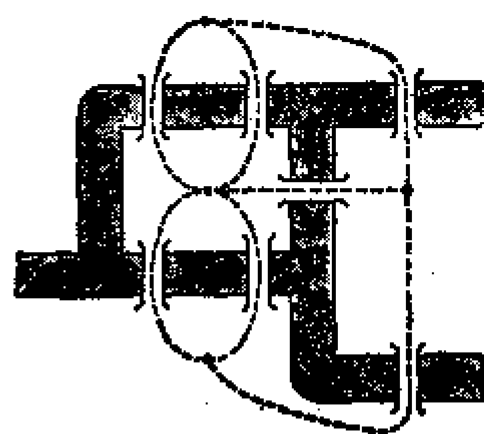


图 1.7 哥尼斯堡桥的模型

不过，许多学者在图论的研究中，比对哥尼斯堡桥更感兴趣的是著名的四色问题，这就是在地图上用颜色表示国家的问题。国境相邻接的国家，如以互不相同的颜色分别着色时，只要四种颜色就足够了。这个假说(十九世纪五十年代)成了热烈讨论的问题，许多学者从事于这一问题的研究。1890 年，P. J. Heawood 证明，假如有五种颜色，则不论什么样的地图，都能区别着色。此后，并没有发现不能用四色着色的反例，但也未见发表过数学证明*2。

1.3 图论在现实中的广泛应用

自从晶体管等半导体被发明以来，电子设备有了显著的发展，

---

*1 欧拉是瑞士的数学家(1707—1783)，在微积分等方面有贡献，他创立了变分法。另外，虚数 i、自然对数的底 e 的符号也是根据他的想法。

*2 1976 年，伊利诺思大学的 K. Appel 和 W. Haken 两位教授宣布，用电子计算机证明了四色问题(参考文献 27)。

高速大型计算机的出现加速了技术革新。现代工业是许多技术的有机结合，即是系统化缘此所产生的成果。

在以计算机为首的台式计算机、测量仪器、电视机等电子设备中，大量使用着的集成电路(IC)和大规模集成电路(LSI)，就是这方面的典型的例子。在这样复杂的大规模的电子线路的分析中，发展了引入图论的解析程序。

还有，利用计算机进行电路设计叫做 CAD (computer aided design)，在这儿，图论也起了作用。在电路描述中，如果用有向图表示元件的联接关系及其电压、电流的方向和数值，则不必用代数方法求解电路方程式，根据图的结构用符号便能求出，对这个问题，即使说多亏有了图论，也不过分。

用于实际配置安装零件的印刷电路板(PC 板)的设计与布线问题中，也用到图论。例如，在底板的板面上，线不能交叉。这一点跟图在平面上各边不得交叉而有什么办法把它画出来是一样的，图的平面性的判定算法有效地起着作用。

由于交通、通讯网的飞速发展，整个世界变得非常密切，非常便利，同时也更复杂更多样化起来。电话线路网、计算机网络、管道网、交通网等所谓网络流问题都随着对图论的研究的进展而发展了。这里所说的流，指的是单位时间内通过的汽车数、油量等一般化了的广义的流动与传输量。

再者，从某一顶点出发且不返回到同一顶点而到达另一顶点所通过的边链叫做路径。两个顶点间存在着路径时，信息传递与流动就是可能的。若从图中去掉某一条边，有关的两个顶点间就不存在路径。这样的边的集合叫做图的割集。在通讯网中，割集起着重要的作用。例如，两顶点间流动的最大量(端子间容量)，用这样的割集便可完全确定（福特-富尔克森的最大流-最小切割定理）。

在逻辑电路方面的组合电路和顺序电路中，图论也很活跃。或者把变量与图的边对应，对开关电路用图的连接矩阵来表示，对开关电路进行分析；或者，另一种做法，把变量与顶点相对应而表示数字电路，既能求出它的拓扑性质，又能进行分析，甚至还能应用于设计。在电路的故障诊断中更要利用到图。

信号流图是表示信号在整个线路（信道）中传输状态的图，这个信号通过线路进入中继站（局）再从中继站（局）沿通向其他各站（局）所有线路传输。因此，这种图能很好地表现出线性系统的物理意义，故在系统研究中被广泛使用。信号流图不仅有助于联立方程式的求解，对于采用由一阶线性微分方程组的状态方程的过渡过程的分析和自动控制问题也是有效的。

现代社会的政治、经济、工业等，无论哪一个领域，都有复杂化和大规模化的趋向。在这样的背景下，以种种条件和制约为基础的效果的规划、运用、管理、买卖等的技巧发展起来了，运筹学、博奕学、用于工程管理的计划鉴定检查法(PERT)、关键工序路线法(CPM)、线性规划等科学手法也陆续出现了。然而，在这些方法中都引进了图论及其技巧。例如，若把复杂的工程用有向图表示，则由于最长路径决定着整个工程所需的天数（时间），因此这种图在工程管理中也就重要了。

像这样的图论，既具有隐藏着的才能，又正在变为积极的奴仆，为人类所用。

习　题

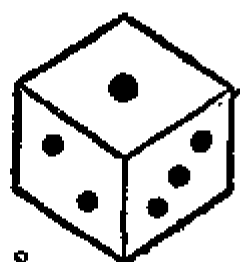


图 1.8

[1] 假如将骰子（图 1.8）的六种眼子用顶点表示，把以这个立方体的边作为分界的面跟面连接起来，在对应的顶点间就连成了边。试根据这个规则，把骰子用图表示。

[2] 试用图表示 A、B、C、D、E 五个队的联赛。

[3]* 六个队联赛，同一个队在一天之内不许比赛 2 次以上，如一天内进行 3 场比赛，五天之内要全部赛完。怎样进行组合才行？

[4] 在 800 cm³ 的玻璃杯中倒入一杯乳剂。使用 500 cm³ 和 300 cm³ 的空玻璃杯，希望每个杯子恰好倒入 400 cm³。这里，不承认用眼睛估计的分量，但容许这样的操作：从某个杯子往另外的杯子里注入，当有某一个杯子成为空杯，或者为一满杯时，这个操作即算结束。这样，在等量分配的情况下，最少注入的次数（操作次数）是多少次？

参 考 文 献

1) D. König: Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen, Leipzig (1936)
2) C. Berge: The Theory of Graphs and Its Applications, John Wiley & Sons, Inc., New York (1962)
[原のフランス語版: Theorie des graphes et ses applications. Dunod, Paris (1958)]
3) S. Seshu & M. B. Reed: Linear Graphs and Electrical Networks, Addison Wesley (1961)
4) W. H. Kim & R. T. Chien: Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia University Press (1962)
5) O. Ore: Theory of Graphs, American Mathematical Soicety, Providence, R. I (1962)
6) O. Ore: Graphs and Their Uses, Random House, New York (1963)
7) R. B. Busacker and T. L. Saaty: Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York (1965)
[訳本: 矢野・伊理訳: グラフ理論とネットワーク/基礎と応用，培風館(1970)]
8) F. Harary, R. Z. Norman, D. Cartwright: Structural Models: An Introduction to the Theory of Directed Graphs, John Wiley & Sons, Inc., New York (1965)
9) F. Harary: Graph Theory and Theoretical Physics, Academic Press (1967)

10) A. Kaufmann: Graphs, Dynamic Programming and Finite Games, Academic Press (1967)
11) 小野寺: グラフ理論の基礎,森北出版(1968)
12) F. Harary: Graph Theory, Addison Wesley (1969)
[訳本: 池田訳: グラフ理論,共立出版(1971)]
13) R. Bellman, K. L. Cooke, and J. A. Lockett: Algorithms Graphs and Computers, Academic Press, Inc., (1970)
[訳本: 渡辺訳: 計算機のためのグラフとアルゴリズム, 共立出版 (1972)]
14) C. W. Marshall: Applied Graph Theory, Wiley-Interscience(1971)
15) W. Mayeda: Graph Theory, Wiley-Interscience (1972)
16) 小野寺: グラフ理論の展開と応用,森北出版(1973)
17) 尾崎・白川: グラフとネットワークの理論,コロナ社(1973)
18) E. J. Henley and R. A. Williams: Graph Theory in Modern Engineering, Academic Press (1973)
19) F. Harary and E. Palmer: Graphical Enumeration, Academic Press (1973)
20) 服部・小沢: グラフ理論解説,昭晃堂(1974)
21) C. ベルジュ・伊理訳: グラフの理論 I,II,III,サイエンス社(1976)
22) W. K. Chen: Applied Graph Theory: graphs and electrical networks, North-Holland, 2nd Edition (1976)
[解説として]
23) 伊理: グラフ理論とその応用 I, II, III, IV, 電子通信學會誌(1971年12月, 1972年1,2,3月)
24) 特集グラフ理論,數理科學(1974年4月)
25) 森口: サイコロの展開図,數學セミナー(1974年7月)p. 19—31
26) 前田: おもしろいグラフ理論とその応用,オーム社(1976年6,7,8,9,10月)
27) 竹内: 四色問題——ついに解決,數學セミナー(1976年10月)

第二章 图的基础

【要点】 本章为了较明确地建立图的概念，将定义有关图的各种术语，学习图论的基本问题和性质等。

2.1 图的结构

由第一章的各种例子，很容易使我们想象出，所谓图，就是由“点”和连接两点间的“线段”构成的线状图。在图中，连接两点间的线段叫做边*(edge)，除对边作特别指明外，边的长短和形状都不加以考虑。

[1] 图的基本结构

图 2.1(a)是直线，图 2.1(b)是曲线，但此时两者都表示同一个边。边的起始点和终止点叫做端点(end points)，习惯上用小圆圈表示。当边的两个端点为同一个点时，就说该边形成自环(self loop)，如图 2.2(a)所示。再者，没有线段的一个点就叫做孤立点(isolated point)，如图 2.2(b)所示。在图中，图2.3(a)所示为串联

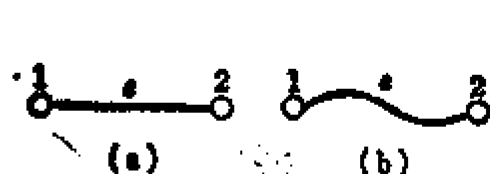


图2.1 边与端点

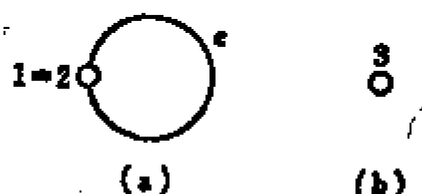


图2.2 自环和孤立点

---

* 有线段(line)、支路(branch)、弦(arc)、1-单形(1-simplex)等名称，但是，在本书中把支路和弦作为特殊的边。

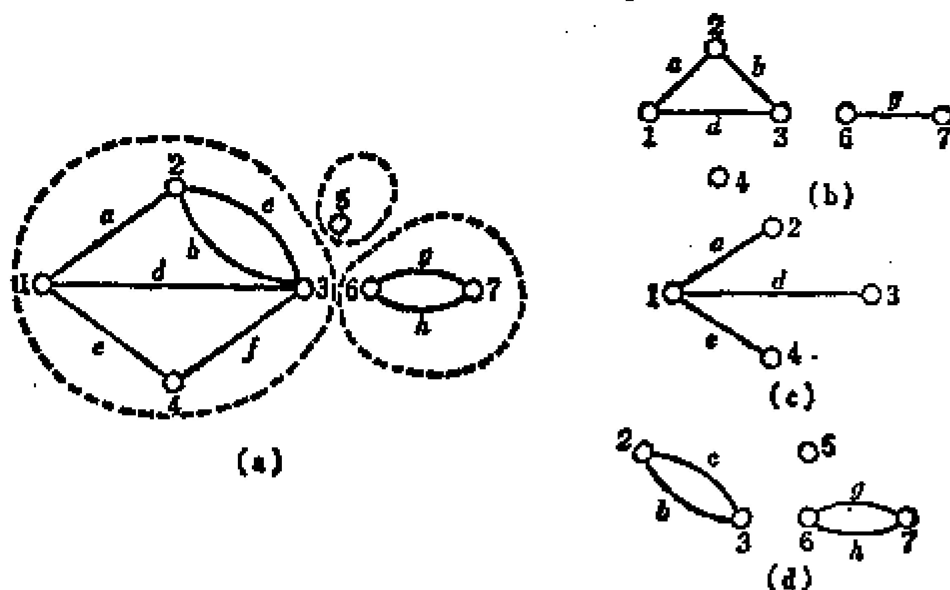
图 2.3

边，不同的两个边有一个相同的端点；图 2.3(b)所示为并联边，不同的两个边具有完全相同的端点。图 2.3(c)表示多重边。

特别是，当不强调孤立点和端点时，一般就把孤立点和端点都叫做图的顶点(vertex)。“边及其端点”的说法也可用“边关联于顶点”(incident at the vertex)的说法来代替。例如，在图 2.3(a) 中边 a 和 b 关联于顶点 2。

这样，所谓图就是用拓扑学表示边与顶点的关联的图形，也可以定义为边与顶点的集合。

图 2.4(a)是由用虚线围着的三个分块组成的一个图，如从集合论的观点来看这个图，也可以说它是由边$\{a, b, c, d, e, f, g, h\}$和顶点$\{1,2,3,4,5,6,7\}$的集合*组成。



(a) G；　(b)、(c)、(d)：G 的子图

图 2.4　图G和子图举例

* 通常，集合用大写字母表示，假如知道了集合的元素，就可把元素放入括号{ }之中表示。因此，今后一般将图表示为 G，G 既是图的名称，同时也意味着边和顶点的集合。

另外，把边数和顶点数都是有限的图叫做**有限图**(finite graph)；而把不属于这种情况的图叫做**无限图**(infinite graph)。然而，如第一章所述，从图的应用方面看，几乎都是有限图，或者可以作为有限图的扩展看待，因此下面所说的图，都是指有限图。

[2] 子图

在某些较大的物体或空间中，有微小部分或子空间等说法，在图中也有子图这种说法。所谓**子图**(subgraph)，就是从原来的图中适当地去掉一些边(及其两个端点)和顶点后所形成的图。子图的边和顶点，必须含于原来的图中。图 2.4(b)、(c)、(d)中的各个子图，它们的边和顶点都包含于图 2.4(a) 所示的原图G中，所以都是子图。虽然图 2.4(a)中三个分块(正确地说，是图的连通片)是原来图的子图，但是子图不一定必须是形成原来图的分块。于是，由图 2.4(a)的$\{a, b, c\}$组成的图也是原来图的子图。在这里要注意，不应被子图的"子"这样的词所困惑*。图的一个顶点及一条边当然也是子图，图本身也是它自己的子图(参阅例题 1)。

对于给定的图，列举出全部子图的问题，可归结为组合问题(参阅例题 2)。

[3] 边交叉时的表示

画图的时候，重要的是边与顶点的连接关系，如图 2.5(a)那样，即使边互相交叉也是可以的。但是，必须注意这个交叉点不是所谓的

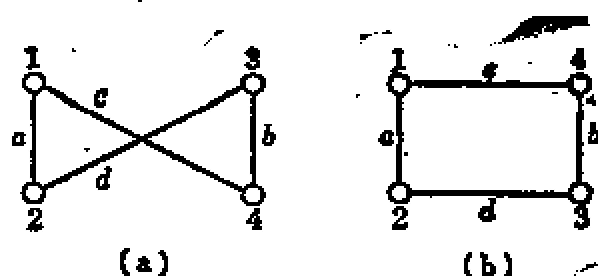


图2.5 (a): 边互相交叉的图
(b): 与(a)图相同

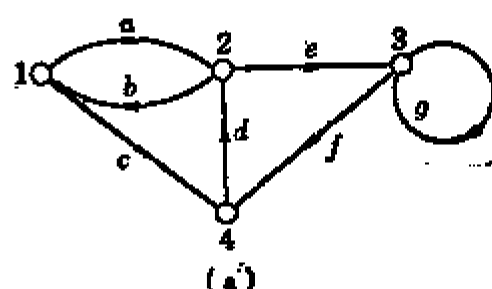
---

* 按数学的严密的定义，所谓没有边和顶点的空图一般也作为子图，这在集合论上也是方便的。

图的顶点。换言之，图(b)是图(a)重画的结果，图(a)、图(b)是同一个图。显而易见，它们的边和顶点的数目、名称及联接关系都一致。把这种图的顶点用圆圈表示，其目的就在于跟边的所有交叉点清楚地区别开。

[4] 有向图和无向图

如图 2.6(a)那样，它们的全部边都具有方向时，即图的全部边由**有向边**(oriented edge)组成时，这种图就叫做**有向图**(oriented graph)。较为典型的例子是带有单向通行的公路网，将这种公路网的交叉点、道路分别对应于图的各个顶点和边，然后，若把单向通行的路用有向边表示，把往返通行的路用方向相反的并联有向边表示，就得到公路的有向图。仅仅由**无向边**(nonoriented edge)构成的图叫做**无向图**(nonoriented graph)。图 2.4、图 2.5 都是无向图。关于有向图的子图的定义和无向图的情况一样。图 2.6(b)就表示子图的一例。



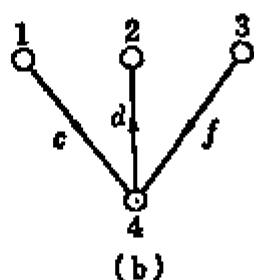


图2.6 有向图(a)及其子图的一例(b)

[例题]1 试证明图G就是其自身G的子图。

[证明] 由于G的全部边和顶点构成了原来的图G，它们包含于G中。因此，G成为其自身的子图。

[例题]2 试在图 2.5(b)的图上，列举出不包含孤立点的全部子图。

[略解] 给定的图由 4 条边构成，因此，若按照仅由 1 条边构成的子图个数为 nC_1、由 2 条边构成的子图个数为 nC_2 这样的组合数目计算，则全部子图数为 $nC_1+nC_2+nC_3+nC_4=2^4-1=15$。

它们示于图 2.7 中。

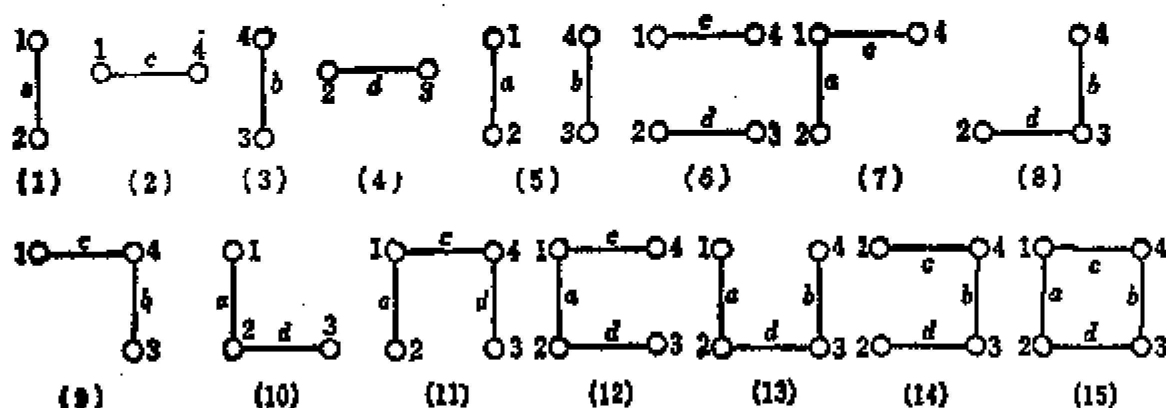


图 2.7　由图 2.5(b)的边构成的全部子图(15个)

2.2　图的秩和零度

我们将引入图的秩与零度这样的量，并将研究它们跟图的结构有怎样的关系。

[1] 图的短接和连通图

首先，所谓把图的边短接，就是将其两个端点重合，并去掉由于端点重合而产生的自环。例如，在图 2.8 上，若把图 G 的边 a 短

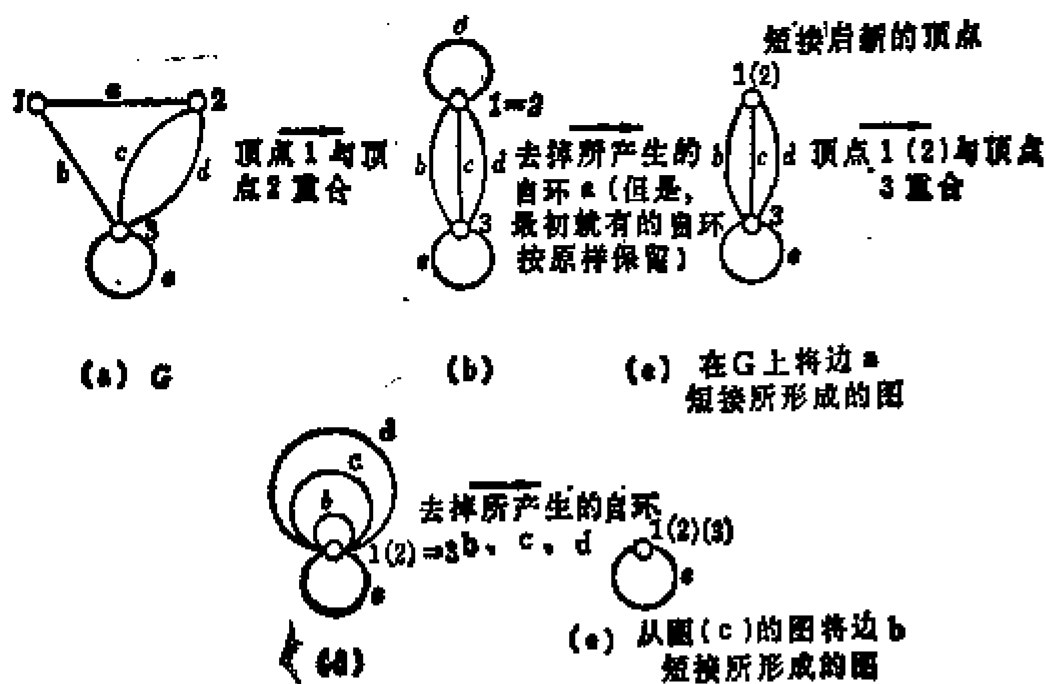


图 2.8　关于图的边的短接

接，便得出图(c)的图。短接的操作方法，可以认为“像橡皮筋那样伸缩自如的边逐渐缩短，到最后边的两端重合起来了”。若再把图(c)的边 b 的两端点重合，就形成自环 b、c、d [图 (d)]。不过原来就有的自环 e 一直保留着，所以在将边 b 短接时，最后自环 e 仍要保留 [图 (e)]。这样，并联边上的两个端点无论具有多少条边时，只要其中一条边短接，即会产生与边数相同数目的自环，但是，对于短接来说，这种自环都要去掉。必须注意的情况是：

(1) 若图中原来存在自环，进行短接时这种自环应予保留。

(2) 若把图的一个边短接，图中的顶点数仅减少一个。

在图中，将边进行短接若干次后，最后成为孤立点，或者成为在一个顶点处连接若干个自环的图时，这个图就连通着，或者说是连通图(connected graph)。对于图 2.8 中的图，若将边一个一个地短接下去，最后便成为图(e)那样的自环，所以根据定义此图是连通图。

另一方面，不连通的图就叫做非连通图 (disconnected graph)。如图 2.9 那样，由四角形和三角形组成的一个图 G，通过短接操作而完全成为两个孤立点，所以这种图是非连通图。图叫做连通的，就是在该图中任意选择两个顶点，从其中一个顶点出发，顺着边走下去，能够到达另一个顶点。(参看习题[6]、第三章 3.1 节的路径。)

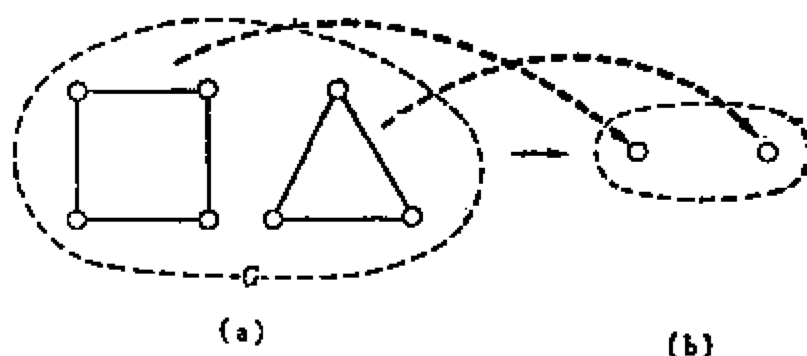


图 2.9 (a)：非连通图 G；　(b)：通过边的短接形成两个顶点

[2] 图的连通片

在图G中，把边和顶点互相连接着，形成一个分离部分的G的连通子图叫做G的**最大连通片**（maximally connected component)或**单连通片**。倘若G连通时，G本身就是连通片。这里，习惯上把孤立点也当作连通片。现在，用$\rho(G)$（或者只用ρ)来表示给定的图G中所包含的连通片的个数*。在图2.9的非连通图G中，有一个四角形和一个三角形两个连通片，$\rho(G)=2$。按照上述，可以说非连通图是由两个以上的连通片组成的。

[3] 图的秩

设图的顶点及连通片的个数分别为n、ρ时，G的秩(rank) $r(G)$可用下式给出：

$$r(G)=n-\rho \tag{2.1}$$

由此式可知，图的秩取决于n和ρ，而与图的边数没有直接的关系。假如顶点个数和连通片个数都相同，则不论什么样的图，其秩都是相同的。因此，当图给定时，从图中去掉某一个边，假如ρ没有变化，则去掉边之后的图的秩与原来的图的秩仍是相同的。在图G中把那些只要不使连通片的个数发生变化而可以去掉的边都去掉，由最后保留的最小数目的边所组成的图设为G_0。在这种情况下，G_0的秩$r(G_0)$当然等于G的秩$r(G)$，但是此时的特征却是G_0的边数等于秩$r(G)$*1。对于G_0这样的图，秩的重要的物理意义之一，如图2.10所示。假若$\rho=1$，即G自身为连通片*2，那么G_0实际

---

* 连通片的个数也叫做零次贝蒂(ベッチ, Betti)数。

*1 参看8.3节基底关联矩阵的大子阵与树的关系项。

*2 当$\rho\geq 2$时，这个子图G_0的各个连通片将由树构成，叫做林(forest)或者叫做多树(multi-tree)。(树一增多就成林!)

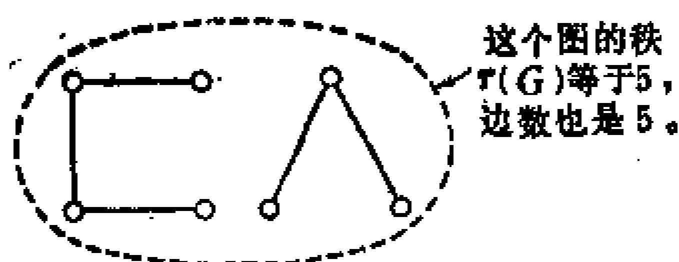


图2.10　包含G（图2.9）的全部顶点，而其秩与G的秩相同的子图

上就是叫做“树”（tree）的连通子图（参看第四章4.2节、习题1及5.3节）。在图2.11中列举了图G及这个G的全部可能的树，秩$r(G)=2$，各个树的边数也是2。

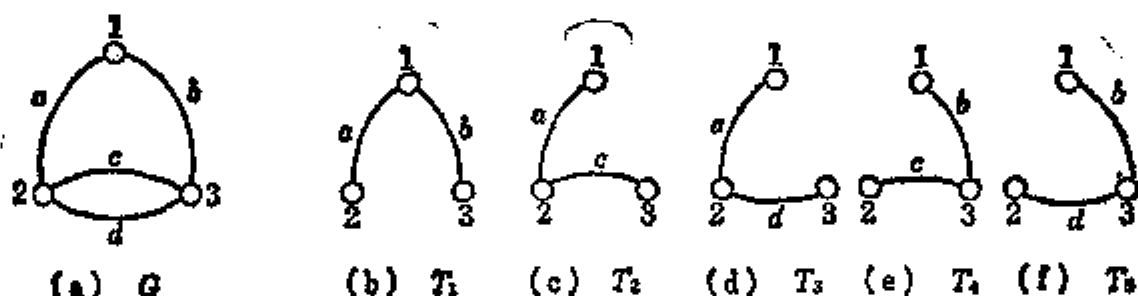
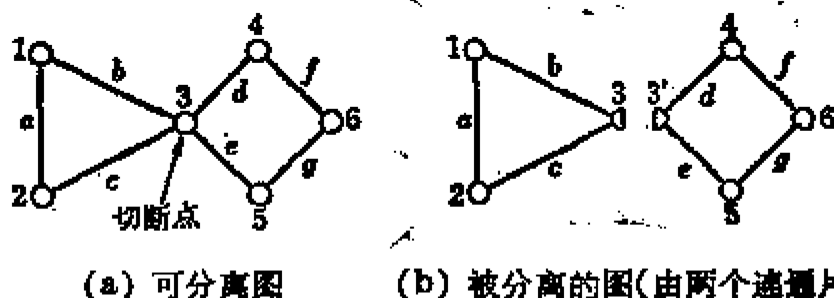


图2.11　(a)：连通图G；　(b)—(f)：G的树，$r(G)=2$，等于树的边数

一个图虽然连通着，但若适当地劏开某一顶点，便可得到完全分离的几个图（连通片）。例如，图2.12(a)的图，将顶点3一分为二，假如使其中一个顶点连接着b、c，另一个顶点连接着d、e，其结果就生成两个连通片，如图(b)那样。这样，当连通图上存在顶点p，若把p适当分劏开便产生两个或两个以上的连通片时，此图就叫做**可分离的**（separable）或者叫做**可分离图**[*1]（separable graph）。不过，能够被分离的连通片应至少有一条边。此时，被分劏的



(a) 可分离图　　(b) 被分离的图（由两个连通片组成）

图2.12

*1　也叫可分图。

顶点叫做切断点(cut vertex)。反之，无论考虑哪个顶点也不能作为切断点，从而不可能分离的图就叫做**不可分离图**[*1](nonseparable graph)。图2.13表示不可分离图的例子。

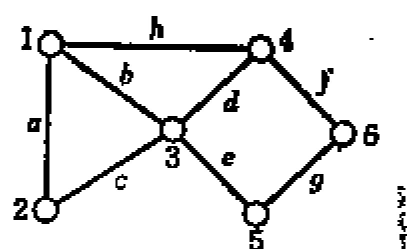


图2.13 不可分离图的例子

[4] 图的零度

下面转到与秩有密切关系的"零度"的说明上。设图G的边、顶点及连通片的各个数目分别为b、n及ρ，此时，若把图的"零度"[*2] (nullity)用$n(G)$表示，则$n(G)$可用下式求出：

$$n(G)=b-r(G)=b-n+\rho \tag{2.2}$$

零度的拓扑概念是非常重要的，与秩一样，是表示图的一个基本量。首先，让我们定义去掉边的操作。所谓去掉图G的边e，就是把e及其两个端点去掉。但是，在e的端点连接着e以外的边的情况下，即使从G中把e去掉，其端点当然还在剩下的图中保存着。所谓G的零度，就是等于在不使图G的连通数ρ改变的情况下能够去掉的边的最大数目。零度还表示图的独立回路数（参看第四章）。根据式(2.2)，$r(G)+n(G)=b$，所以秩与零度之和总是等于该图的边的总数。因此，假如ρ不变，秩主要取决于顶点数，由此可知，边数越多，零度也就越大。

[5] 图的秩与零度的拓扑意义

现在，我们来研究一下，当在图上添加孤立点和边时，图的秩与零度将如何变化。

---

*1 也叫不可分图。

*2 还有回路秩、连通度、一次贝蒂数等别名。

设图G由n个顶点、b条边、p个连通片组成，在此图中，添加m个孤立点而成新的图，假定为G'，因为一个孤立点就是一个连通片，所以

$$r(G')=(n+m)-(p+m)=n-p=r(G)$$

又，因为G'的边数等于G的边数，所以得

$$n(G')=b-r(G')=b-r(G)=n(G)$$

完全同样，G中有孤立点时，从G中去掉孤立点而得出新的图，其秩与零度和原来图的秩与零度是完全相同的。因此，孤立点的添加和去掉，对图的秩与零度都没有影响。

其次，再来研究一下在图中接上新的边时，秩与零度的变化情况。设G的任意两个顶点为i、j，在i与j间接上新的边，假定此时的图为G'，按照i和j是否存在于同一个连通片内，分为以下两种情况来考虑。

(1) 当顶点i、j属于G中同一个连通片时，G'的顶点与连通片的个数和G的这些数都相同，只是边增加一条［见图 2.14(a)］。因此

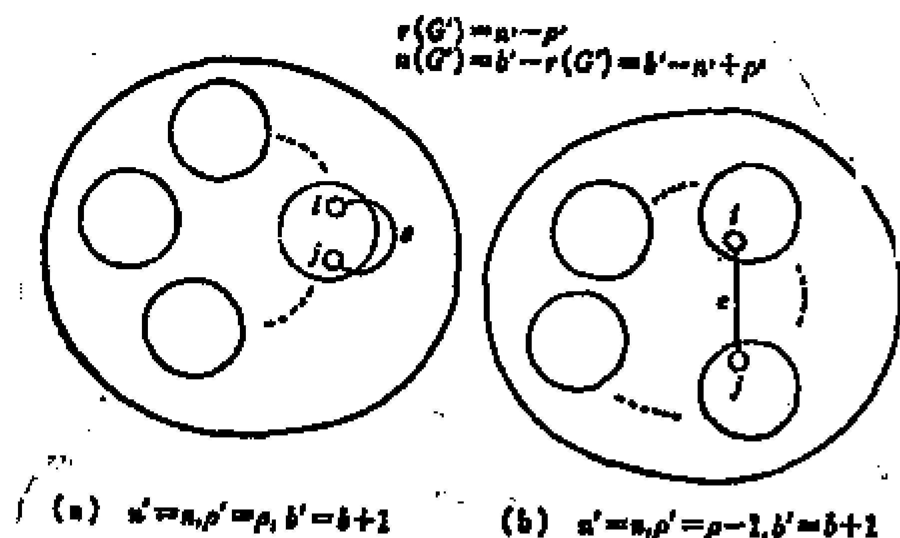


图2.14 图G'(a)：G的一个连通片内的两个顶点间用新的边连接时

(b)：属于G的不同的两个连通片的两个顶点间用新的边连接时

$$r(G')=r(G) \tag{2.3}$$

$$n(G') = (b+1) - r(G') = b - r(G') + 1$$
$$= (b - r(G) + 1) = n(G) + 1 \qquad (2.4)$$

结果就是零度增加了但秩不变。

(2) 两个顶点 i、j 分别属于 G 中不同的连通片时，由于在 G' 中连通片的数目减一个，$\rho' = \rho - 1$，所以

$$r(G') = n' - \rho' = n - (\rho - 1) = r(G) + 1 \qquad (2.5)$$

即秩增加 1。

另一方面，因为

$$n(G') = b' - r(G') = (b+1) - (r(G) + 1)$$
$$= b - r(G) = n(G) \qquad (2.6)$$

所以零度不变。

图的秩与零度分别由式(2.1)与式(2.2)给出，但是利用上述性质就容易知道这些值绝对不会成为负值（参看例题 1)。关于图的拓扑性质或物理意义跟秩与零度的关系，在 4.1 节、5.4 节中再稍作补充说明。

[例题] 1　对于任意的图，试证明 $r(G) \geqslant 0$, $n(G) \geqslant 0$。

[证明]　设仅由包含于 G 中的全部顶点构成的子图为 G_0，显然，

$$r(G_0) = n(G_0) = 0$$

假如把图 G 的边逐一添加于 G_0 上便能再构成图 G，因此，假如被加上边的图适合前述性质，则根据秩与零度是非减函数，可得 $r(G) \geqslant 0$, $n(G) \geqslant 0$。

[例题] 2　对于图 2.12(a)的 G，像例题 1 那样，把最初仅由 G 的顶点组成的子图记为 G_0。接着一边把 G 的边一个一个地加到 G_0 上，一边弄清图 2.14(a)、(b)，特别是当秩增加 1 或者零度增加 1 时，试观察图在拓扑上将发生怎样的变化。

2.3 同　　构

图是顶点和边的集合。画图的时候，顶点的位置和连接两顶点的边的形状可以是任意的。这个结果就导致两个图乍一看好像不同，其实两图是相同的，或者顶点和边的名称不同而结构都相同的情况。这样的概念叫做同构，正如下面的定义那样。

当两个图 G_1 和 G_2 对应时，即 G_1 的顶点与 G_2 的顶点一一对应，且在对应的两个顶点间连接的边也一一对应时，就说 G_1 和 G_2 是同构(isomorphic)的。因此，在两个图上顶点数和边数应全都相等，边和顶点的联接关系也应该对应。图 2.15 的图，乍一看让人觉得是互相不同的结构，但是 G_1 和 G_2 的顶点对应关系若假定为 $1\leftrightarrow1'$，$2\leftrightarrow2'$，…，$6\leftrightarrow6'$，则边的对应关系便为 $a\leftrightarrow a'$，$b\leftrightarrow b'$，…，$i\leftrightarrow i'$，所以 G_1 与 G_2 是同构的。

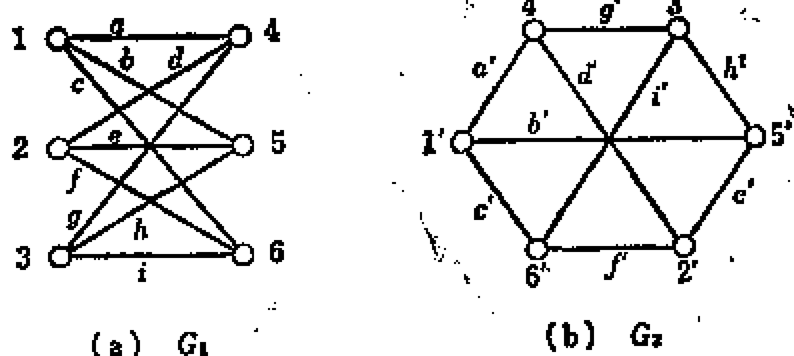
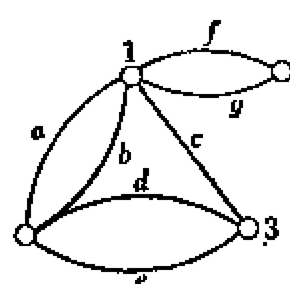


图 2.15　同构图

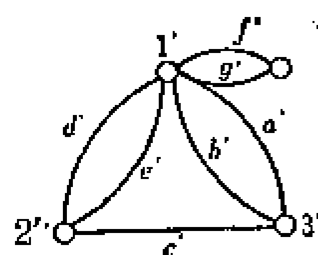
在这种同构的两个图上，顶点与边的联接关系被保持着。相对于这点，当两个图上保持着回路的对应关系，且同类边彼此一一对应时，就说这两个图是互为 2-同构（2-isomorphic）的。在图 2.16 的 G 和 G' 上，没有保持顶点与边的联接关系，但是图 G 与图 G' 的边却一一对应着，并且保持了回路的对应关系，所以成为 2-同构图。

回路[*1]的对应关系

G	G'
$[a,b]$	$[a',b']$
$[d,e]$	$[d',e']$
$[a,c,d]$	$[a',c',d']$
$[a,c,e]$	$[a',c',e']$
$[b,c,d]$	$[b',c',d']$
$[b,c,e]$	$[b',c',e']$
$[f,g]$	$[f',g']$



(a) G



(b) G'

图2.16 2-同构图

［例题］ 下面的方法是由惠特尼（Whitney）引进的判定2-同构的拓扑方法。即假若G与G'是2-同构的，那么如按下述两个作法之一（或两个）连续不断地做下去，最后G与G'就成同构的。

(1) 如果有切断点，就在切断点进行分割，使连通片增加一

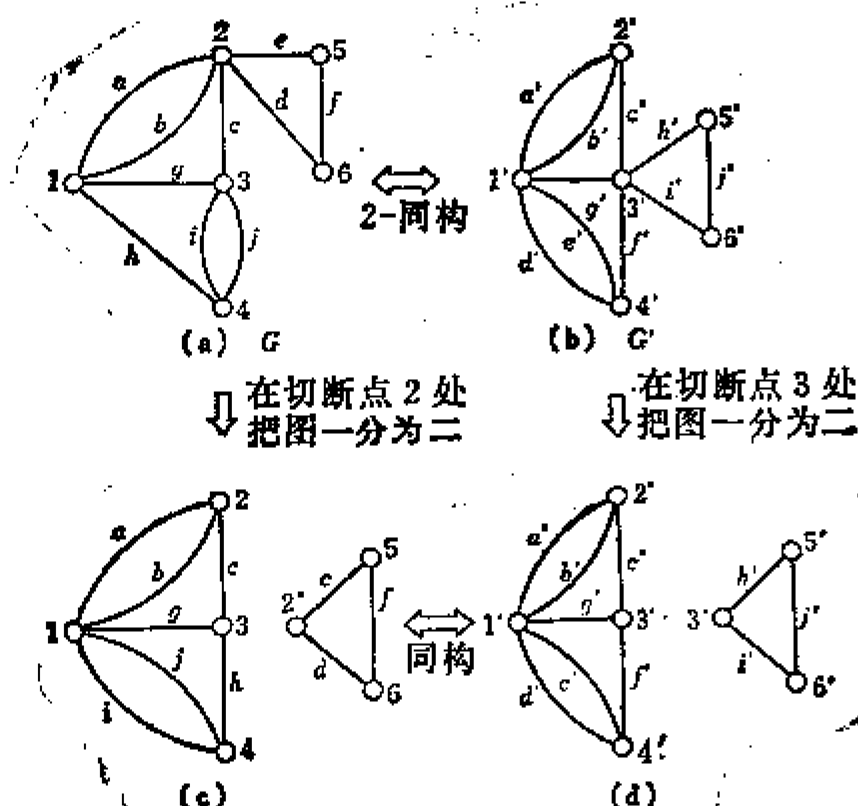


图2.17 判定2-同构的拓扑方法

---

*1 本书中规定用[ ]代表回路。

个。

(2) 假若图具有仅以两个顶点(例如 r、s)作为公共顶点的两个子图H和 H^c，就把H的两个顶点 r、s 的名称调换。按拓扑学来说，就是以这两个顶点的中心，将H翻转。

图 2.17(a)、(b)是 2-同构(各自试做做看)。因此，首先在图(a)上将顶点 2 切断；其次把由边 (h, i, j) 组成的子图H以顶点1、3 的中心进行翻转，就得到图(c)。另一方面，把图(b)的顶点 3′ 切断就得到图(d)，图(c)与图(d)是同构的。

2.4 平面图和对偶图

对于图，存在着所谓平面性的一种画法问题。所谓图是平面的(planar)，就是在平面上描绘时，除端点以外，图的边没有交叉。这样的图就叫做平面图。

另一方面，图不在平面上时，就叫做非平面图 (nonplanar graph)。

平面图是重要的图，不仅与数学中有来历的四色问题等相关，而且在非常复杂的电子技术的布线问题等方面都有应用。

图 2.18 的图，无论是把边适当伸缩，还是把边拉到外侧重画，要使边不交叉是画不出来的，所以是非平面图。然而，若从同一个图中去掉一个边，例如 f，成为图 2.19(a)那样，再把边 b 引伸到左边，把边 c 引伸到右边，便成为图(b)，所以图(a)是平面图。

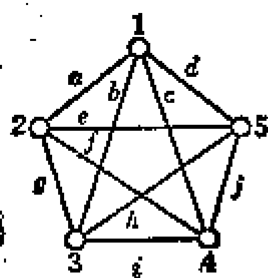


图2.18 非平面图

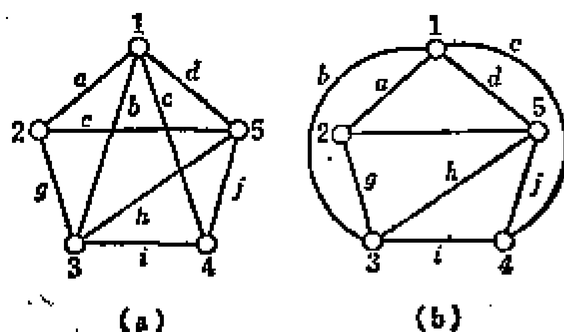


图2.19 平面图

还有，自环对图的平面性没有影响，可以不予考虑。

若把平面图画在纸上，便可看到，这个图将纸面分割成几个区域(region)，此种区域一般都由几条边包围着(也存在由并联边包围着的情况)。另外，被包围着的区域也叫做**面**(face)、或**窗**(window)、或**内部区域**(inner region)等。例如在图 2.20 中，由$\{a, c, e\}$构成的 f_1 和由 $\{b, d, e\}$ 构成的 f_2 都是内部区域。另一方面，没有被包围的区域，如图中 f_3，就叫做**外部区域**(outer region)。

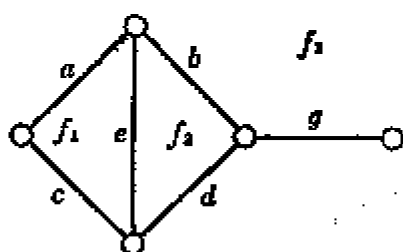


图2.20 平面图的区域

再者，在连通的平面图上，若图的顶点、边及区域(内部和外部全部区域)的数目分别为 n、b、f，则这些数满足下列关系式：

$$n-b+f=2 \quad \text{(欧拉多面体公式)} \tag{2.7}$$

例如，在图 2.20 中，$n=5$，$b=6$，$f=3$，于是 $n-b+f=5-6+3=2$。

让我们用关于连通平面图的边数的归纳法来证明* 欧拉多面体公式(Euler's polyhedron formula)。假如 $b=1$，式(2.7)明显是成立的。假定这个公式对具有 $b(\geqslant 2)$条边的平面图成立，那么对于由$(b+1)$条边构成的连通图G来说，这个公式也成立。现说明如下。设 G' 的顶点数、边数、区域数分别为 n'、b'、f'，但是 $b'=b+1$。首先，假设在 G' 中没有回路，G' 是树，所以 $b'=n'-1$，$f'=1$。$n'-b'+f'=n'-(n'-1)+1=2$。

其次，考虑在 G' 中至少存在一个回路的情况。对于平面图，为了不失平面性，可将任一区域改画到最外侧的区域。因此，若设位于 G' 的最外侧的一个边为 e，并把 e 从 G' 中去掉，则顶点数

---

* 利用以下事实来证明也可：形成平面图的全部回路的独立回路数，即仅等于内部区域数且每一个内部区域的边的集合作为一个独立回路。

不变，仅仅边及区域数各减少1，结果是 $b'-1(=b)$，$f'-1$。根据假定，公式应该成立。所以 $n'-(b'-1)+(f'-1)=2$。可见，在 G' 上仍然保持着 $n'-b'+f'=2$ 的关系。

[1] 图的同胚

现在，设平面图已被画出。不论在图的哪一个边上的适当位置添加新的顶点，即用串联的两个边置换该边，也不会改变平面性。例如，尽管把图 2.21(a)上的边 b、c 分别用串联边 b_1b_2、c_1c_2 置换，但图(b)仍是平面图，只是顶点数增加了。完全同样，对于非平面图，可以说也存在这种性质。即不论是用串联边去置换某个边，还是反过来，当有串联边时用一个边去置换此串联边，都仅仅是顶点数变化了，图的非平面性仍旧被保持着。

通过这种置换方法画出的图，跟原来的图由于顶点数不同而不同构，就说是同胚。所谓两个图 G_1、G_2 同胚*1(homeomorphic)，指的是存在一个图 G'，若把图 G_1 和 G_2 或者其中之一的边用串联边置换后，G_1 和 G_2 都与 G' 成为同构。由这个定义可知，图 2.21 中的图(a)、(b)是同胚的。

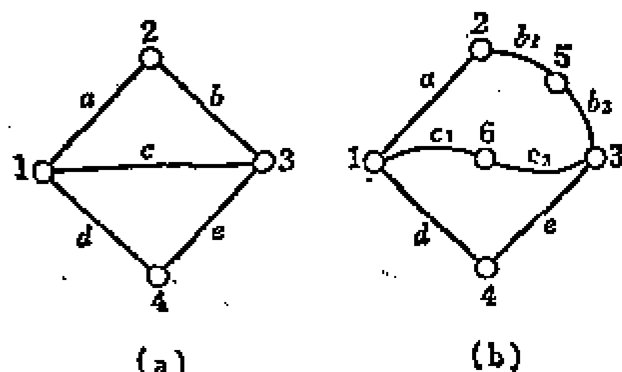


图 2.21 同胚图

图 2.22 的(a)图，已知是非平面图。另一方面，图 (b)的图*2 也是在平面中不能画出的非平面图。这两个图在非平面图中叫做基本非平面图(basic non-planar graph)。库拉托斯基 (Kwratowski)于 1930 年利用同胚

*1 也叫拓扑同构。

*2 这个图与图 2.15 的图同构。

的概念证明了判定图是平面还是非平面的定理[*1]。

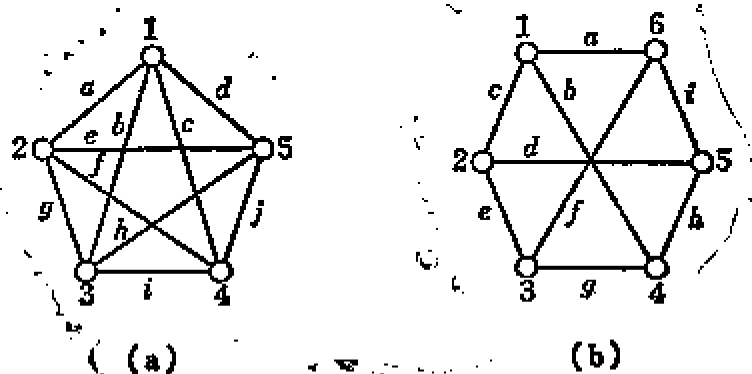


图2.22 基本非平面图

[2] 图的平面性和对偶

库拉托斯基定理如下：

"有限图G为平面图的充要条件是，G不包含基本非平面图中任一个的同胚子图。"

因此，按照这个定理，一个图若是非平面图，则该图中至少含有一个基本非平面图的子图。

使平面图带有特征的重要概念中有"对偶"(dual)这个词。惠特尼像下面的说明那样，论述了平面图与其对偶图的关系[*2]。他用图的秩和零度定义集合论的对偶，并把拓扑对偶抽象化，使这些概念清楚明确。

首先，让我们定义拓扑对偶(即对偶图)。考虑没有孤立点的连通的平面图，设它为G，在G的每个区域中设置一个顶点。经过作为区域境界的一个边，用边把具有共同境界的两个区域中的顶点连接起来。全部区域都经过这样处理后而形成的图G^*就叫做

---

*1 参阅参考文献9)。

*2 参阅参考文献11)。

G 的对偶图 (dual graph)。图 2.23 表示用虚线画出的平面图 G 和用实线画出的它的对偶图 G^*。因为在 G 上有三个区域，所以在 G^* 上对应于这三个区域有三个顶点 f_1'、f_2'、f_3'。区域 f_1 和区域 f_2 是以边 b 作为境界而邻接着的，所以顶点 f_1' 和顶点 f_2' 之间用边 b' 连接。同样，区域 f_1 和区域 f_3 以边 a 和边 d 作为境界而邻接着，所以存在边 a'、d'。将这种操作进行下去，最后就得到图 G^*，这个对偶图显然是平面图。从画对偶图的方法可知，G 的边数与其对偶图 G^* 的边数相等。再者，应当注意，对偶图是从已知的图得出的，所以即使是同一个图，若画法不同，其对偶图也不一样。

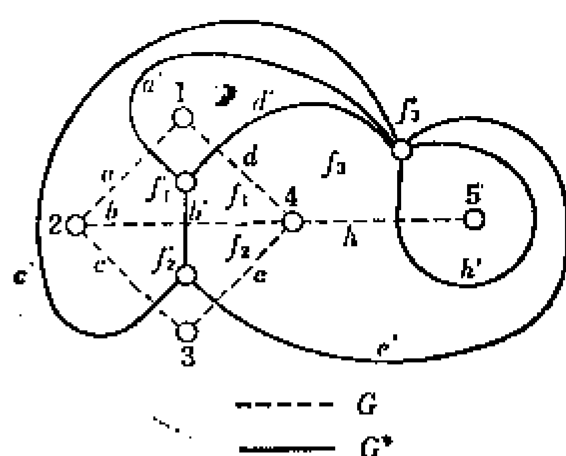


图 2.23 对偶图

另外，让我们研究一下新画出的对偶图的对偶图。这个过程与从 G 画出 G^* 的画法恰好相反，所以既有画成原来图的情况，又有随画法的改变，G^* 的对偶图画不成原来图的情况。对于前一种情况，G^* 的对偶图就是 G，在符号上写成 $(G^*)^*=G$；对于后一种情况，$(G^*)^*$ 的回路与 G 的回路对应，回路关系被保持着，所以是互为 2-同构。此时，写作 $(G^*)^* \overset{2}{\equiv} G$。

下面，我们转到惠特尼的集合论的对偶上。如上所述，这种定义把拓扑对偶进行抽象化。从图的秩与零度对集合论的对偶所作的定义如下：对于两个图 G_1 和 G_2，满足下列两个条件时，就说 G_2 和 G_1 对偶（或说 G_2 是 G_1 的对偶图）：

(1) G_1 和 G_2 的各个边一一对应。

(2) 对于 G_1 的任意子图 H_1，下式成立：

$$n(H_1)=r(G_2)-r(H_2^c) \quad (2.8)$$

式中 H_2 是对应于 H_1 的 G_2 的子图，H_2^c 是 H_2 的补图*1；而 $n(\ )$、$r(\ )$分别表示零度和秩数。

现在考查一下图 2.23 中的 G^* 在集合论上是否也和 G 对偶。

显然，满足条件(1)，所以只要考虑 G 的全部子图，弄清条件(2)就行了。若把 H_1 取作图 2.24(a)那样，对应的 H_2 就成为同

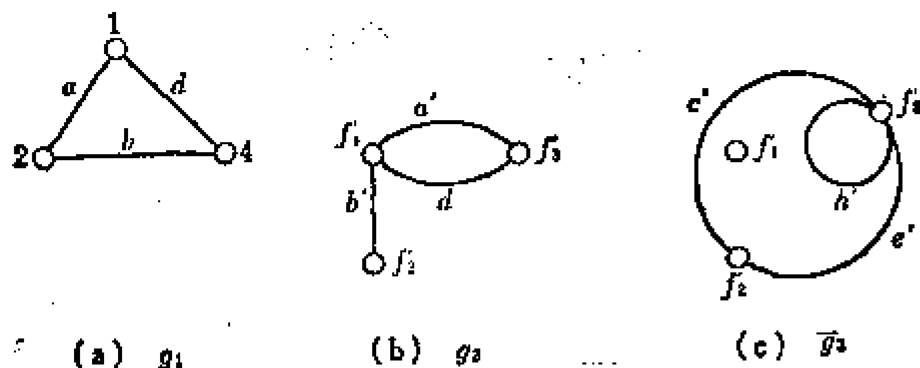


图2.24 集合论对偶的说明

图(b)。若从 G^* 中去掉 H_2 的边，便得到图(c)那样的 H_2^c。于是

$$n(H_1)=1$$

$$r(G^*)-r(H_2^c)=(3-1)-(3-2)=1$$

结果一致。同样，对于其他所有子图，也满足式(2.8)，所以 G^*是 G 的对偶。

再者，根据这个定义，假若 G_2 是 G_1 的对偶，下述性质便容易证明。

(1)
$$\left.\begin{aligned} n(G_1)=r(G_2) \\ r(G_1)=n(G_2) \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

(2) 反之，G_1 是 G_2 的对偶。

若设 $H_1=G_1$，则 $H_2^c=\varnothing$(空集)，因而 $r(H_2^c)=0$，$n(G_1)=r(G_2)$。对于 G_1 和 G_2，因有相同数目的边(设为 b 条)，所以有 $r(G_1)=b-n(G_1)$，$n(G_2)=b-r(G_2)$，故得 $r(G_1)=n(G_2)$。性

*1 在 G_2 上，H_2 的补图 H_2^c 就是把 H_2 的全部边(假如 H_2 中有孤立点，它也包含在内)从 G_2 中去掉后所留下的图。

质(2)的证明留作本章习题。

由性质(1)和(2)可知，假若 G_1 和 G_2 互为对偶，那么一个图的秩就是另一个图的零度。对于对偶图，秩和零度之间存在着完全互逆的关系。

由上述我们明白了拓扑对偶和集合论的对偶。但是这两者之间存在着怎样的关系呢？实际上，若设连通平面图 G_1 的拓扑对偶图为 G_2，则能够证明 G_2 在集合论的意义上是 G_1 的对偶。关于这个证明我们决定省略。惠特尼得出了这样的结论："图是平面的，其充要条件是该图有对偶图(惠特尼定理)"。

关于对偶图上割集与回路的关系等，将在第三章和第四章中说明。

〔例题〕1　试说明四面体的对偶图还是四面体，即是自身的对偶。

〔略解〕　图 2.25(a)是表示四面体的平面图，图(b)是其对偶图，同样为四面体。

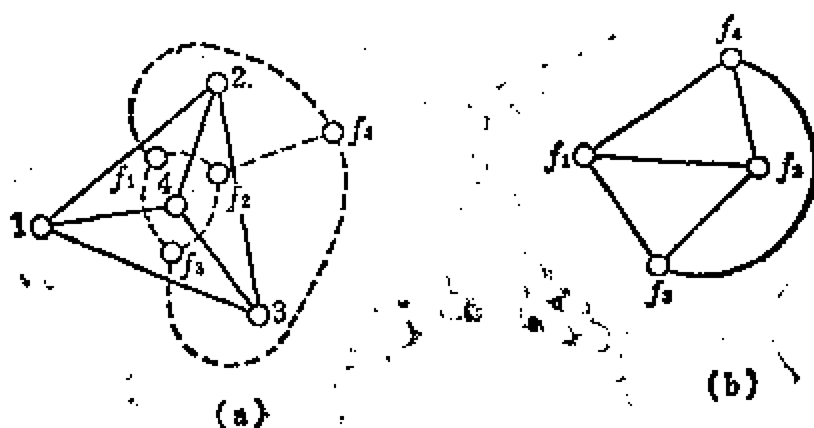


图2.25　(a)：四面体；　(b)：(a)的对偶图

〔例题〕2　试对图 2.23 的 G，作出其全部子图，弄清式(2.8)。

2.5　次数(度数)

表示在图的顶点上连接着多少条边的指标叫做该顶点的次数

(或度数，degree)。在有向图的情况下，这个次数可作如下分解：把连接于顶点 v_i 且边的方向是离开 v_i 的边数记为 $d^+(v_i)$，叫做顶点 v_i 的出次数(outgoing degree of vertex v_i)；同样，把进入 v_i 的边数叫做 v_i 入次数(incoming degree of vertex v_i)，用 $d^-(v_i)$ 表示；由于有向边组成的自环，在其顶点上，边既是进入的又是离开的，结果对 $d^+(v_i)$ 和 $d^-(v_i)$的贡献仅分别为一。

由此，在有向图上顶点的次数为

$$d(v_i) = d^+(v_i) + d^-(v_i) \tag{2.10}$$

例如，图 2.6(a)的顶点 3 的次数 $d(3)$，因 $d^+(3)=2$，$d^-(3)=2$，故 $d(3)=4$。同样，$d(1)=2+1=3$。

在无向图的情况下，连接着顶点的边数（但是，当是自环时便为 2 倍)定义为该点的次数。仅就次数来说，和有向图的情况相比没有差别。例如，在图 2.4(a)中，$d(1)=3$，$d(2)=3$，$d(3)=4$，$d(4)=2$。孤立点 5 的次数明显为零，即 $d(5)=0$。

所有的顶点都有相同的次数(例如为r)时，该图就叫做次数为 r 的**正则图**(regular graph)。例如，两个基本非平面图，既是正则图，又是在任意两个顶点间都有边的这样一种正则图[称做**完备图**(complete graph)]。假如是孤立点，其次数就是零；同样，$d(v)=0$ 的顶点是孤立点。

由于图的边连接在两个顶点上，所以对于图的边的总数与次数来说，下述关系成立（这个定理也是由欧拉提出的，所以在图论中被说成是最初定理)：

设图的总边数为 b，顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$。此时，所有顶点的次数之和等于总边数的 2 倍，即

$$2b = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \tag{2.11}$$

式(2.11)中不是自环的边总是被连接在两个顶点上，而对于自环

的边，在计算次数时，明显是取作2倍的，其证明请读者自己试证得出。

例如，对于图2.13中的图，$b=8$，$\sum d(v_i)=\sum_{i=1}^{6} d(v_i)=16=2b$。

根据这个定理，下面的推论是容易导出的，即：对于任意一个图，次数为奇数的顶点必定存在偶数个。这个证明留作习题。

再者，如果图是平面图，则式(2.7)的欧拉公式成立。现在，考虑这样一种平面图：在这种平面图中，包围任一区域的边的数都是 m。这样一来，因为 $fm=2b$，所以边数可用下式表示：

$$b=\frac{m(n-2)}{m-2} \tag{2.12}$$

例如，假定任一区域是四角形，根据式(2.12)，边数就是 $b=2n-4$。

所谓最大平面图(maximal planar graph)，就是不存在并联边，且无论在何处加上一条边就成为非平面图的这样一种图。当顶点数已知时，存在不失平面性的可能的边的最大数目，就是这种最大平面图的边数。最大平面图的各个区域都是三角形，即 $m=3$，此时，$b=3n-6$。因此，图是平面的必要条件是："平面图的边数和顶点数分别为 b 和 n 时，关系式 $b\leqslant 3n-6$ 成立"。对于图2.22的基本非平面图图(a)和图(b)，若比较一下 b 与 $3n-6$ 的值，就可得出：对于图(a)来说，$b=10$，$3n-6=9$；对于图(b)来说，$b=9$，$3n-6=12$。故对于图(a)，因违反 $b\leqslant 3n-6$ 的条件，所以由此可得出结论，图(a)的图是非平面图。图(b)却满足平面图的必要条件。

对于平面图的次数，大概没有什么限制吧？现在，假定在具有 b 条边和 n 个顶点的平面图上，所有顶点的次数都是6以上，那么，$2b\geqslant 6n$，即 $b\geqslant 3n$，违反了上述的必要条件。所以，在平面图

中，次数是 5 或 5 以下的顶点至少存在一个。这个性质可用于地图着色的证明（希伍德(Heawood)的证明）等，即在一个平面上描绘地图，用五种颜色来着色便能将边界相邻的国家区别开。

［例题］1　试证明：任一个图，具有奇数次数的顶点的个数是偶数（也包括 0）。

［证明］　在式(2.11)中，假若改变顶点的编号，设m个顶点$v_1, v_2, \cdots, v_m$ $(m \leqslant n)$有奇数的次数，其余的顶点有偶数的次数，那么

$$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_m)=2b-(d(v_{m+1})+\cdots+d(v_n))$$

右边是偶数，而左边是m个奇数的总和，所以m必须是偶数（也包括 0）。

习　　题

［1］　具有n个顶点的连通图，假设不容许有自环和并联边，试证明其可能的最大边数为$\frac{1}{2}n(n-1)$。

［2］　假设图G没有自环和并联边。试证明，当G由ρ个连通片组成，且具有n个顶点时，G中所容许的最大边数可以给出为$\frac{1}{2}(n-\rho)(n-\rho-1)$。

［3］　当图G已给定时，试证明：不论是将G的任一边用串联的两个边来置换，还是将串联的两个边用一个边来置换，所得图的零度都与G的零度相同，是个定数。

［4］　试说明当图G由多少个连通片组成时，G的秩与零度分别等于各个连通片的秩及零度的总和。

［5］　试证明在具有n个顶点的连通图中，至少存在$(n-1)$条边。

［6］　试说明在连通图上，任选两个顶点，若从一个顶点出发，顺着边走下去，可以到达另一个顶点。

［7］　试证明（拓扑）对偶图是连通的。

参考文献

J. Riordan: An Introduction to Combinatorial Analysis, John Wiley & Sons, Inc.,New York(1958),尤其第6章"Partitions, Compositions, Trees, and Networks", p. 107—162

2) C. L. Liu: Introduction to Combinatorial Mathematics, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York (1968), 尤其第6章 "Fundamental Concepts in the Theory of Graphs", 第7章 "Trees, Circuits,and Cut-Sets",第8章"Planar and Dual Graphs"

3) H. Whitney: On the Abstract Properties of Linear Dependence, Amer. J. Math., Vol. 57 (1935), p. 509—533

4) R. Gould: Graphs and Vector Spaces, J. Math. Phy.(1958),p.193—214

5) H. Whitney: Congruent Graphs and The Connectivity of Graphs, Amer. J. Math., Vol. 54 (1932), p. 150—168

6) H. Whitney: On The Classification of Graphs, Amer. J. Math.,Vol. 55 (1933), p. 236—

7) H. Whitney: A Set of Topological Invariants for Graphs, Amer. J. Math., Vol. 55 (1933), p. 231—235

8) H. Whitney: 2-Isomorphic Graphs, Amer. J. Math., Vol. 55 (1933) p. 245—254

9) C. Kuratowski: Sur le probleme des courbes gauches en Topologie, Fundamenta Mathematicae, Vol. 15 (1930), p. 271—283

10) H. Whitney: Non-separable and Planar Graphs, Trans. Amer.Math. Soc., Vol. 34 (1932), p. 339—362

11) H. Whitney: Planar Graphs, Fundamenta Mathematicae, Vol. 21 (1933), p. 73—84

12) C. ベルジュ著・伊理他訳: グラフの理論 I,サイエンス社(1976)

第三章 路径和割集

【要点】 路径与割集，同是图的特殊子图。路径是将顶点依次联接起来的边的链，因此具有连通图的性质，而割集是图中被切割的边的集合。本章一方面将它们加以对比，一方面叙述它们的拓扑性质。随后，学习图与割集的矩阵表示——关联矩阵与割集矩阵，理解矩阵的秩与图的树的关系等。最后，学习将割集应用于通讯网络的"最大流·最小切割"定理。

3.1 路 径

让我们用以道路作为边、以交叉点作为顶点的道路网的无向图为例来进行讨论。从某一个交叉点往另一个交叉点走，一般有各种各样的走法，但是除去"散步"或"迷路"以外，返回到同一个交叉点的情况是不大有的。在图中，从某一个顶点出发，不返回到已经通过的相同的交叉点，而到达另外某个顶点的边的链，就叫做路径(path)。最初的顶点称做始点 (initial vertex)，最后的顶点称做终点(terminal vertex)。在无向图中，路径的始点与终点是互逆的，不区别始点与终点，就叫做两顶点间的路径。

例如，在图 3.1 的图G中，(a, c, f)和(b, f)等是顶点 1 与顶点 4 之间的路径。再者，即使是一条边也成为路径，同图中边a就是顶点 1 与顶点 2 间的路径。边列 $abce$ 和 bdf 因两次通过同一个顶点，所以不叫路径[*1]。在路径中，一个顶点仅出现一次，所以

---

*1 即使通过某一顶点 2 次以上也可以，但始点与终点不相同，边仅仅出现一次这样的边的链叫做开边列(open edge train)或称欧拉路径(Euler line, Eulerpath)。

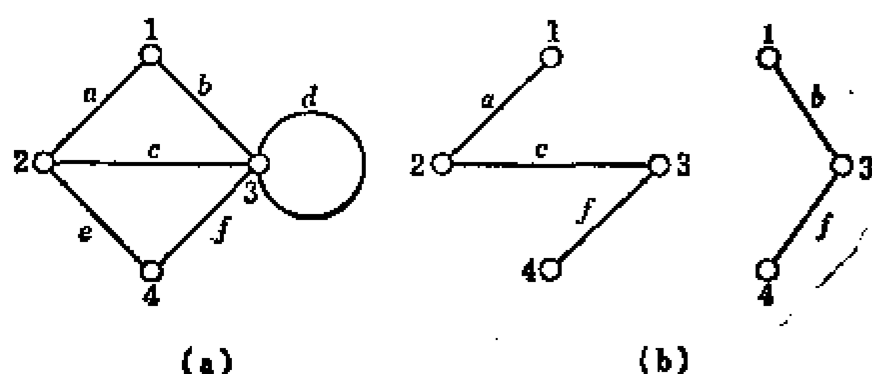


图3.1 (a)图 G;(b)路径之例

一条边不会出现两次(为什么)。

当路径中存在 $k(\geqslant 1)$ 条边时，这个路径就叫长度为 k 的路径。若从次数的观点来观察路径，长度是2以上的路径，就是只有两个顶点的次数是1、其他所有顶点的次数都是2的连通图。

上一章中，图的连通性是根据边的短路操作来定义的，如果用路径来定义，就可以这样说："所谓连通图，就是在任意两个顶点间至少存在一条路径的图。"另一方面，假如经过短路操作，图缩成一个顶点(或者一个顶点及与其关联的几条自环)，那末根据归纳法，在任意两个顶点间都存在路径(参阅第二章习题[6])。

[路径的重要性]

在两个顶点间，一般存在若干条路径。让我们应用公路的距离来分析一下这个问题。把公路的距离对应于表示公路网的图的各边。从乘上汽车的某个交叉点到达作为目的地的另一个交叉点，希望行进的时间最少。假若车速一定，那末只要在图的路径中求出最短路径(给定路径的边数的总和为最小的路径)就可以了。这就叫做**最短路径问题**[*1] (shortest path problem)。

*1 第一章习题[4]的注入的路径问题就属于这个问题。

另一方面，也有求最长路径的路径问题。例如，在建造房屋时的作业日程计划中，作业的种类以顶点表示，假如在某项作业完成之后还有作业，在其两个顶点间用有向边连接。不待说，即使有能够并行的作业也是可以的。

然后，从用有向边的始端表示的作业开始，到着平房顶作业，把这期间所需要的天数画在该边上。这种情况下，由于后续工作的内容不同，所要天数一般是不同的。

那末，完成全部工作要多少天呢？对于这个问题的解答，若能求出在有向图上联接作业的开始与终止的路径中时间最长的路径*1 就行了。在这个最长路径的作业顺序中，一旦工作稍有延误，就意味着整个工程要延误，所以也叫做临界路径（critical path）。这种应用，不仅适用于工程管理，而且也适用于生产、计划等普通的进度表问题。现在作为用电子计算机解复杂网络的方法有，计划鉴定检查法（PERT——program evaluation and review technique）与关键工序路线法（CPM——critical path method）等。

路径的重要应用之一还有流（フロー）的问题，它在管道网、公路网和通讯网等所谓传输网络的分析方面是很有效的。有关这方面的内容将在最后一节学习。

3.2 割　集

[1] 路径与割集的关系

在图 3.2 的图 G 中，顶点 1 与 3 之间的路径是 (a,c)，(a,b,e)，

---

*1 对于这种路径的边来说，通常从始点到终点在方向上应当一致。这样的路径叫做顺向路径（directed path）。虽然也有"有向路"、"有向路径"等说法，但由于容易混淆，故在本书中统一为"顺向路径"。

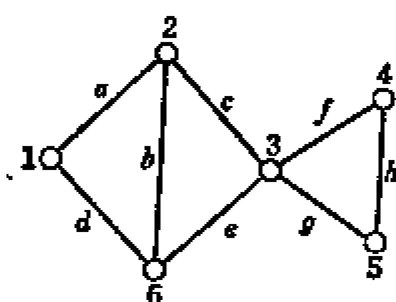


图3.2 图G

(d, b, c)，(d, e)四条。如果这两个顶点间一条路径也不让有，只要去掉(a,d)或(a, b, e)等就可以了。一旦去掉适当数量的边，两点间就不存在路径，并且此种边的集合是最小(即，若把属于此集合的边即使保留一条不去掉，那末在所研究的两个顶点间就肯定存在着路径)时，这种边集合就叫做分割两个顶点的割集或者切断集合。例如，在图3.2的图G中，$\{a,d\}$，$\{b, c, d\}$就是分割顶点1与顶点3的割集，同时也是分割顶点1与顶点6的割集。边集合$\{b, c, e\}$，虽然分割顶点1与顶点3，但不是最小，所以不叫割集。

至此，我们考察了分割无向图上的指定的两个顶点间的割集，但是一般所说的割集，并不规定特定的顶点，而是象下面那样来规定。在图G上(即使不是连通的也可以)，当适当的边集合Q满足下列两个条件时，就把Q叫做G的割集(cut-set)。

(1) 若从G上去掉属于Q的所有的边，则恰好形成两个新的连通片(即，新产生的图的秩，仅比G的秩减小1)。

(2) Q是最小。即Q的任何真子集都不具有性质(1)。

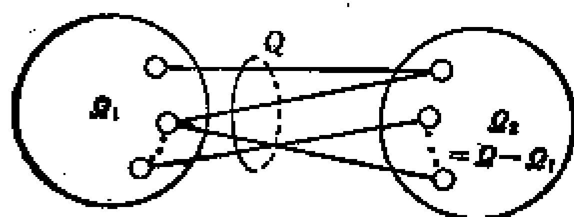


图3.3 关于连通图的割集的概念

图3.3表示了连通图的割集概念。在这里，Ω代表属于G的全部顶点的集合，Ω_1是Ω的真子集，即是从Ω中适当选出的顶点的集合，$\Omega_1^c(=\Omega-\Omega_1)$代表剩下的顶点的集合。割集$Q$就是联接$\Omega_1$与$\Omega_1^c$的边的集合，可把它写为

$$Q=E(\Omega_1\times\Omega_1^c)=E(\Omega_1^c\times\Omega_1)$$

假如边集合Q是连通图G的割集，则：按条件(1)，若从G中把属于

Q 的边全部去掉（把去掉后的部分写成 $G-Q$），便形成两个连通图，一个是具有 Ω_1 个顶点的连通子图，另一个是具有余下的 Ω_2 个顶点的连通子图；按条件(2)，假如不从 G 中去掉属于 Q 的所有的边，就不能得到两个连通片。

假如连通图 G 有 n 个顶点，由于对 Ω_1 的顶点个数是按 1 个的情况，2 个的情况，…，$(n-1)$ 个的情况来考虑的，因此，如果顶点个数增多，那末就有相当多数量的割集，这一点是容易明白的（参阅习题[8]）。

若从图 3.4(a)的 G 中将 $\{a, b, c, e\}$ 的边全部去掉，则由于形成像图(b)那样的三个连通片而秩减少 2，所以边集合 $\{a, b, c, e\}$ 不是割集。而 $G-\{a, b, e\}$ 变成图(c)那样，因为满足定义的两个条件，所以 $\{a, b, e\}$ 是割集。

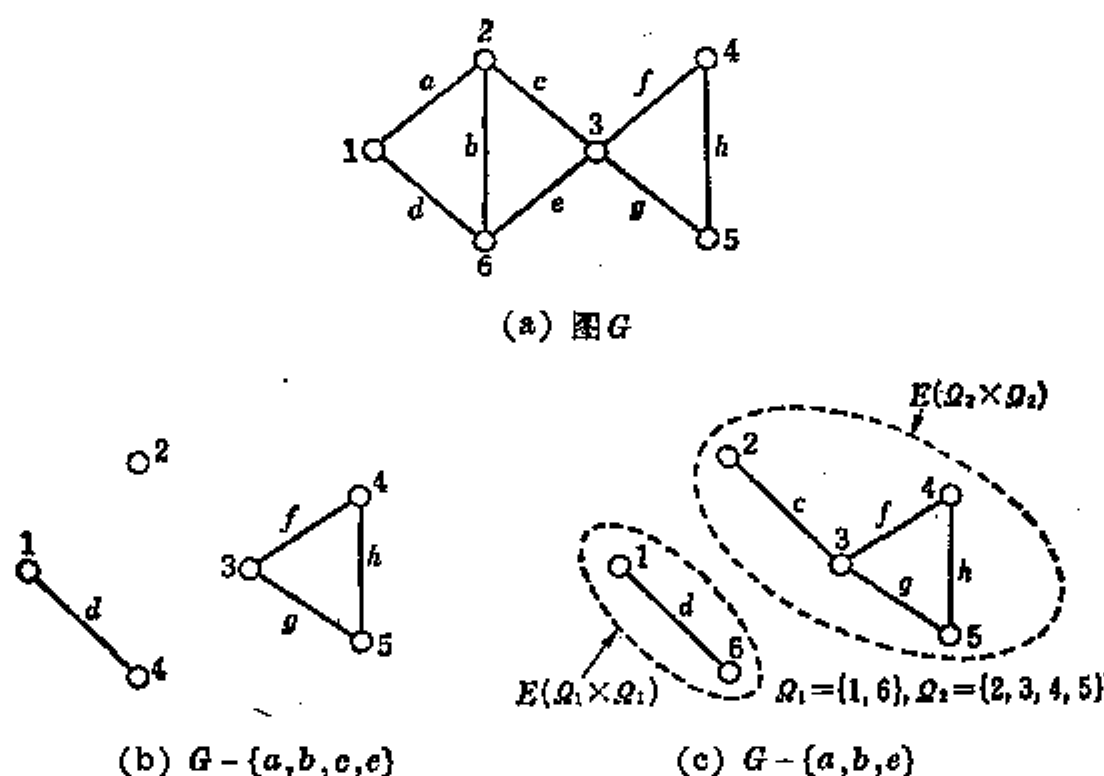
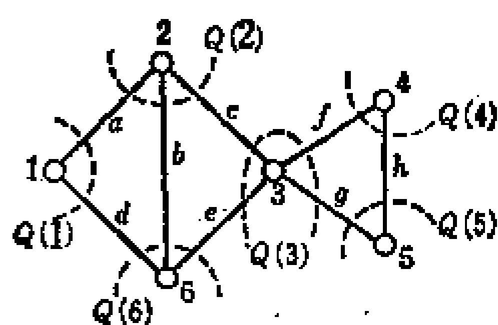


图 3.4 去掉边集合的情况

与某个顶点相连接的全部边叫做该顶点的**关联集合**(incidence set)。若将这个关联集合从图中去掉，该顶点与其他顶点间就



$Q(1)=\{a, d\}$
$Q(2)=\{a, b, c\}$
$Q(3)=\{c, e, f, g\}$
$Q(4)=\{f, h\}$
$Q(5)=\{g, h\}$
$Q(6)=\{b, d, e\}$

图3.5 图G及其关联集合

没有路径，这个图就完全被分割。故关联集合有可能成为割集，但一般地说并不一定成为割集。例如，在图3.5的图G中，顶点3的关联集合（以$Q(3)$表示）为$\{c, e, f, g\}$。若从G中把$Q(3)$去掉，则如图3.8(c)那样，得到三个连通片，因此，$Q(3)$不满足割集的定义。仔细观察一下$Q(3)$，就可以注意到，这个集合是互相不具有共同边，即所谓互质的两个边集合$\{c, e\}$与$\{f, g\}$的并集，且两个集合都是割集。即$Q(3)=\{c, e, f, g\}=\{c, e\}\cup\{f, g\}$，且$\{c, e\}$和$\{f, g\}$分别是$G$的割集。从这个例子也容易想像出，图的任意顶点的关联集合，或是割集，或是互质的几个割集的并集。在图G中，设任意顶点v_i的关联集合为$Q(v_i)$，若从G中去掉$Q(v_i)$，则顶点v_i留下成为孤立点，所以连通片至少增加一个。倘若此时形成几个连通片，那末其中每一个连通片在原来的图G中与顶点v_i之间所联接着的边的全体就成为一个割集。因此，连接各个连通片与顶点v_i的边的集合，就分别成为割集，而且是互质的。这是容易明白的。注意，这个结论，即使对于不连通的G也是成立的。请读者自行作出严密的证明(参阅习题[5])。

再者，像图3.6那样的完备图中，任一关联集合都是割集(参阅习题[6])。

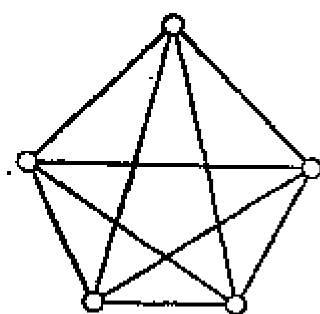


图3.6 完备图（任一关联集合都为割集）

反之，割集跟关联集合有怎样的关系呢？在图3.2的图G中，$Q=\{a, b, e\}$是一个割集，若从G中去掉这个割集，则如图3.4(c)所示那样，形成包含顶点1、6的连通片和包

含顶点 2、3、4、5 的另一个连通片。在那里，若取顶点 1 与顶点 6 的关联集合的环和(⊕)*1，即根据 $Q(1)\oplus Q(6)=\{a, d\}\oplus\{d, b, e\}$的演算，则或者一个连通片内没有边，或者成为 $Q(1)\oplus Q(6)=\{a, b, e\}$，这就是刚才说过的割集 Q。完全同样，$Q(2)\oplus Q(3)\oplus Q(4)\oplus Q(5)=\{a, b, e\}=Q$。这样，任一割集都可用关联集合的环和来表示(但是，表示方法通常不是唯一的)。这个重要性质可作如下证明。

[2] 用关联集合的环和表示割集

现在，设 $\Omega_1=\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$，$\Omega_1^c=\Omega-\Omega_1=\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}^c=\{v_{m+1}, v_{m+2}, \cdots, v_n\}$，于是，有

$$E(\{v_1\}\times\{v_1^c\})\oplus E(\{v_2\}\times\{v_2^c\})\oplus\cdots\oplus E(\{v_m\}\times\{v_m^c\})$$
$$=E(\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}\times\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}^c)=Q \qquad (3.2)^{*2}$$

这里，$E(\{v_1\}\times\{v_1^c\})$是顶点 v_1 与其他顶点间的边的集合，所以是 $Q(v_1)$，其他也完全同样。因此，式(3.2)可改写为

$$Q(v_1)\oplus Q(v_2)\oplus\cdots\oplus Q(v_m)=E(\Omega_1\times\Omega_1^c) \qquad (3.3)$$

这个式子表明，任一割集都可写成关联集合的环和。

然而，若取全部顶点的关联集合的环和，则将完全成为空集(为什么)。换言之，连通图 G 的任意顶点的关联集合的环和等于其余顶点的关联集合的环和。其证明只要应用公式 (3.2) 就行了。

两个关联集合的环和一般不成为关联集合，两个割集的环和一般也不成为割集。但是，若把割集或者互质割集的并集作为一个元素来考虑，对由这样的元素组成的集合进行⊕运算，就构成数

---

*1 ⊕, exclusive or (异或), ring sum (环和)。

*2 参阅习题[7]。

学上的可交换群[*1]。

割集与回路的关系以及基本割集[*2]等将在下一章学习。

[3] 分割特定的两个顶点的割集的算法

由于任一割集都可从关联集合得出，所以从所有割集中仅仅选出分割特定的两个顶点的割集这种目标是能达到的，但工作量很大。因此，下面说明一种稍微简单的计算分割特定两个顶点的割集的方法[*3]。设连通图G有n个顶点，顶点按 1，2，…，n 编号，打算分割的两个顶点为i、j。这时，分割i与j的割集，通过一直包括$Q(i)$的、$Q(j)$以外的关联集合的可能组合与$Q(i)$的环和，按下式求得。

$$\left.\begin{array}{l} Q(i) \\ Q(i)\oplus Q(1) \\ Q(i)\oplus Q(2) \\ \qquad\vdots \\ Q(i)\oplus Q(n) \\ Q(i)\oplus Q(1)\oplus Q(2) \\ \qquad\vdots \\ Q(i)\oplus Q(1)\oplus\cdots\oplus Q(j-1)\oplus Q(j+1)\oplus\cdots\oplus Q(n) \end{array}\right\} \quad (3.4)$$

在式(3.4)中用$Q(j)$代替$Q(i)$也是可以的(即用j去置换i也可

---

*1 在上述的元素中，设空集$\varnothing$相加的集合为$\{Q_i\}$，这时

(1) 对于所有的Q_j、$Q_k\in\{Q_i\}$，$Q_j\oplus Q_k=Q_k\oplus Q_j\in\{Q_i\}$。

(2) 对于所有的Q_j、Q_k、$Q_l\in\{Q_i\}$，$Q_j\oplus(Q_k\oplus Q_l)=(Q_j\oplus Q_k)\oplus Q_l$。

(3) 单位元，存在$\varnothing\in\{Q_i\}$，对于所有的$Q_j\in\{Q_i\}$，$Q_j\oplus\varnothing=Q_j$。

(4) 对于所有的$Q_j\in\{Q_i\}$，逆元(Q_j)存在，$Q_j\oplus(Q_j)=\varnothing$。

*2 参阅4.4节。基本割集的集合是独立的，根据$\oplus$运算，能生成全部可能的割集或互质割集的并集。

*3 详细内容可参阅参考文献3)，pp. 186—194。

以)。可以证明，上式的各个集合就是分割顶点 i 与顶点 j 的割集，或互质的几个割集的环和*1。也可得知，当像后者那样成为割集的并集时，其中只有一个集合是分割 i 与 j 的割集，其余的都是不分割 i 和 j 的割集，因此，若把这多余的集合去掉，便得到纯粹分割 i 和 j 的割集。让我们对图 3.7 中的图 G，求出分割顶点 1 和顶点 4 的割集。首先，计算式(3.4)。设 $i=1$, $j=4$，则

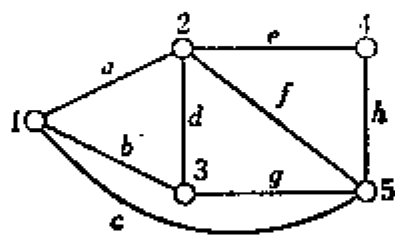


图 3.7　图 G

$$Q(1)=\{a,b,c\}$$

$$Q(1)\oplus Q(2)=\{a,b,c\}\oplus\{a,d,e,f\}=\{b,c,d,e,f\}$$

$$Q(1)\oplus Q(3)=\{a,b,c\}\oplus\{b,d,g\}=\{a,c,d,g\}$$

$$Q(1)\oplus Q(5)=\{a,b,c\}\oplus\{c,f,g,h\}=\{a,b,f,g,h\}$$

$$Q(1)\oplus Q(2)\oplus Q(3)=\{b,c,d,e,f\}\oplus\{b,d,g\}=\{c,e,f,g\}$$

$$Q(1)\oplus Q(2)\oplus Q(5)=\{b,c,d,e,f\}\oplus\{c,f,g,h\}$$
$$=\{b,d,e,g,h\}=\{b,d,g\}\cup\{e,h\}$$

$$Q(1)\oplus Q(3)\oplus Q(5)=\{a,c,d,g\}\oplus\{c,f,g,h\}=\{a,d,f,h\}$$

$$Q(1)\oplus Q(2)\oplus Q(3)\oplus Q(5)=Q(4)=\{e,h\}$$

在上列第 6 个式子中，包含着$\{e, h\}$这样的一个分割顶点 1 与顶点 4 的割集(最后的式子)。所以，除此式以外，其它全都是分割顶点 1 与顶点 4 的割集。

［例题］1　对于图 3.2 的图 G，试确定下列边集合中哪些是割集？(a) $\{a, b\}$,　(b) $\{b, c, d\}$,　(c) $\{c, e, f, g\}$,　(d) $\{c,g,h\}$。

［略解］　首先，$r(G)=5$。(a)把从 G 中去掉边 a 与边 b 写成 $G-\{a, b\}$(以下相同)。由图 3.8(a)，$G-\{a, b\}$是连通图且秩数

---

*1　参阅参考文献 8)。

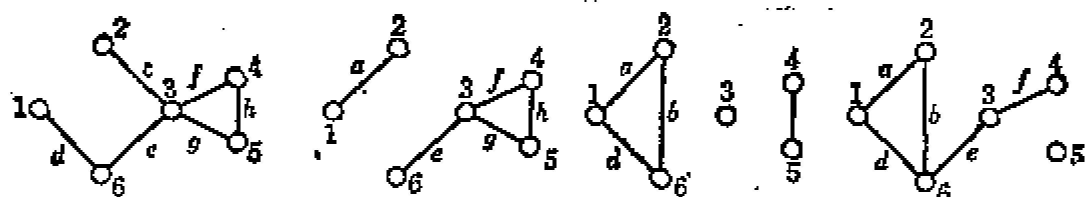


图 3.8 例题 1

没有变化，所以不是割集。(b) $G-\{b,c,d\}$ 的图如图(b)所示，秩为 4，且不论把$\{b,c,d\}$中哪一条边加到图(b)上，都为连通图，其秩为 5，所以，$\{b,c,d\}$是割集。(c) $G-\{c,e,f,g\}$ 的图如图(c)所示，秩为 3，因此不是割集。但是，却成为互质的割集$\{c,e\}$与割集$\{f,g\}$的并集。(d) $G-\{c,g,h\}$的图是图(d)，其秩为 4，在集合 $\{c,g,h\}$中有$\{g,h\}$这样的割集，所以 $\{c,g,h\}$ 不是割集。

［例题］2 试证明：对于连通图，所有顶点的关联集合的环和为空集。然后用适当的图来加以检验。

［证明］ 若设连通图G的顶点数为 n，则有 n 个关联集合。由于G的任一个边总是关联在两个顶点上，所以这个边在 n 个关联集合中分别包含在两个顶点的关联集合内。因此，G 的各个边在 n 个关联集合中总是出现两次，且分别包含于两个不同的关联集合内。对于这种情况，若把 n 个关联集合当作一个集合，则成为由相同的边组成元素，且有两个同样的集合。所以 n 个关联集合的环和成为空集。

【例题】3 对于图 3.2 的 G，试将割集 $Q_1=\{b,c,d\}$，$Q_2=\{c,e\}$，$Q_3=\{b,d,e\}$，$Q_4=\{f,h\}$用适当的关联集合的环和来表示。

［解答］ 把顶点 i 的关联集合表示为 $Q(i)$，则

$Q_1=Q(1)\oplus Q(2)$

$Q_2=Q(3)\oplus Q(4)\oplus Q(5)$

$Q_3=Q(6)=Q(1)\oplus Q(2)\oplus Q(3)\oplus Q(4)\oplus Q(5)$

$$Q_4 = Q(4) = Q(1) \oplus Q(2) \oplus Q(3) \oplus Q(5) \oplus Q(6)$$

3.3 关联矩阵

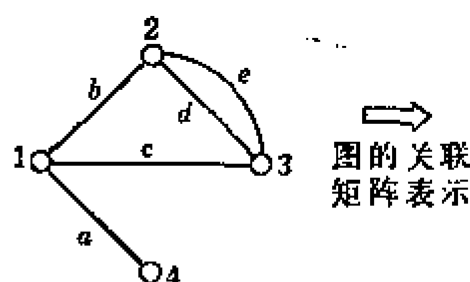
[1] 关联矩阵定义

若把边与顶点是否相连接用“0”与“1”两种数值来表示，就能用矩阵表示关联情况。这种矩阵，确切地说叫做顶点–边的关联矩阵(node–edge incidence matrix)，一般简称为**关联矩阵**(*incidence matrix*)。没有孤立点和自环的图，完全能够用这种矩阵表示。后面将导出，图的秩与该图的关联矩阵的秩是一致的。再者，当图由好几个连通片组成时，以下的讨论可以原封不动地扩展。所以在本节中只讨论没有孤立点和自环的无向连通图。

假如把顶点分配于各行上，而把边分配于各列上，那么所有的边与顶点的联接关系就能按下述方法表示。现设图G的顶点数及边数分别为n、b，则按下面规则得到的n行b列矩阵（写作$\boldsymbol{A}_e$）就叫做**关联矩阵**。设$\boldsymbol{A}_e$的(i, j)元素为a_{ij}，则

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{当边 } j \text{ 与顶点 } i \text{ 关联时} \\ 0 & \text{其他情况}(e_j \text{ 不与顶点 } i \text{ 关联时}) \end{cases}$$

例如，对于图3.9(a)的图，可得图(b)的关联矩阵。



此例是把顶点与边按顺序编号书写的，但对一般情况无此必要。

$$\boldsymbol{A}_e = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(a) 图G　　　　(b) G的$\boldsymbol{A}_e$

图3.9 表示顶点与边的联接关系的关联矩阵表示(顶点与边的数目愈多，矩阵越大，但由于把图用代数方法处理，所以变得方便)

其次，让我们看一下关联矩阵的意义与特征(图 3.10)。由于 A_e 的行表示有没有边与该行所代表的顶点相关联，所以若把该行的元素全部相加，便得出该顶点的次数，即表示与该顶点相关联的边数。

$$A_e = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{matrix} \end{array}$$

将各行中的元素全部相加，便得该顶点的次数。

$d(1)=3$

$d(2)=3$

$d(3)=3$

$d(4)=1$

将各列中的元素全部相加→

图 3.10 A_e 的特征

$$A_e = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

A_e 的任一行可从其余行简单地得出，因而是多余的，可以去掉。

图 3.11 图G(图 3.9)的基底关联矩阵

另一方面，由于边通常有两个端点，所以，在 A_e 的各列中，每列总存在两个"1"。这一点意味着，若在各列中将全部元素以 2 为模[*1]进行相加，通常就表示为"0"。因此，若将全部行相加，便形成仅由"0"组成的行。故任一行的各元素都可从该元素所在列的其余元素相加得出。在数学上就说这一个行从属于其他的行。从关

---

*1 以2为模的加法(与环和的算法相同)：

$0+0=0,\quad 0+1=1,\quad 1+0=1$

$1+1=0$←(如果按普通加法为"2"，便作为 0)

联矩阵中去掉这种多余的任意行之后的矩阵（写作 $\boldsymbol{A}$）就叫做**基底(既约）关联矩阵**（basis incidence matrix, reduced incidence matrix)，通常简称为关联矩阵。

[2] 计算关联矩阵的秩的预备知识

想要计算关联矩阵的秩，事先必须作下列准备。设连通图 G 的任一边的端点为 i、j。将这个边短接，倘若形成自环，就设去掉这个边之后所得的新的图为 $G_{i(j)}(=G_{j(i)})$，见图 3.12。此时，$G_{i(j)}$ 的关联矩阵就等于，在 G 的 $\boldsymbol{A}_e$ 中，以 2 为模把 i 行加到 j 行上，去掉 i 行后，把 j 行① 的由非零变成零的元素所在的列全部去掉后所保留下来的子矩阵。这一点可证明如下。

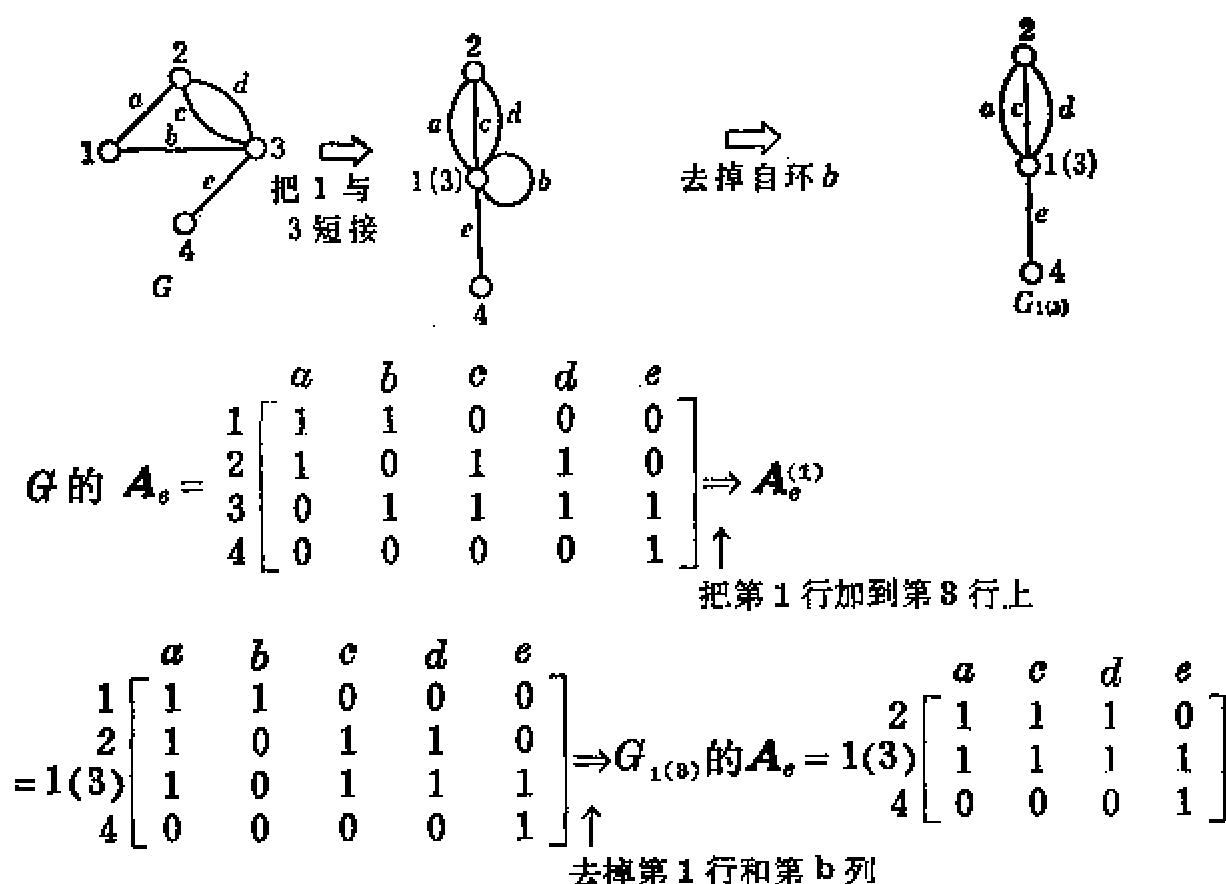


图 3.12　两个顶点短接后，若形成自环，从原图的关联矩阵求去掉这种自环后的图的关联矩阵的过程

① 原文为 i 行，似误。——译者

A_e 的 i 行加到 j 行上时的 j 行，习惯上叫做 $i(j)$行。于是，行 $i(j)$的元素$[a_{ik}+a_{jk}]$($k=1, 2, \cdots, b$) 就成为下列二种情况之一：

$$a_{ik}+a_{jk}=\begin{cases}1 & \text{在}G\text{中，边 }e_k\text{ 或是与顶点 }i\text{，或是与顶点 }j\text{ 关联时} \\ 0 & \text{在}G\text{中，边 }e_k\text{ 与 }i\text{ 和 }j\text{ 两个顶点都关联时；或者边 }e_k\text{ 既不与顶点 }i\text{ 关联，也不与 }j\text{ 关联时}\end{cases}$$

若把由于将以 i、j 为两个端点的边短接而形成的新的顶点设为 $i(j)$，则边 e_k 与 $i(j)$关联的情况，或是 (i) e_k 以顶点 $i(j)$形成自环，即在G中 e_k 的两个端点是 i、j；或是(ii) e_k 与顶点 i、j 之一关联着。因为通过短接而形成的自环被去掉了，所以必须把 $i(j)$行中变为零值的元素所在的列去掉。假如由于短接而使关联于顶点 i 的边改变为关联于顶点 $i(j)$，那末顶点 i 便可消除。因为 $i(j)$行是把 i 行与 j 行相加所得的行，所以 $i(j)$行对应于 $G_{i(j)}$ 的顶点 $i(j)$。消除顶点 i，只要去掉 i 行即可。另一方面，与 G中 i、j 以外的顶点相关联的边，在上述短接过程中关联情况不发生变化，因此，i 行与 j 行以外的行，在 $G_{i(j)}$中与在G中都相同。

故 $G_{i(j)}$ 的关联矩阵就等于经过下列变化所得到的子矩阵：首先(1)在G的 A_e 中把 i 行与 j 行相加(以 2 为模)；(2)去掉 i 行；(3)把 j 行中由非零变为零的元素所在的列全部去掉。这样，就得出对应于图的两个顶点的短接和对关联矩阵的处理的下述定理。

[3] 关联矩阵的秩

具有 n 个顶点的连通图的关联矩阵的秩为 $n-1$，与图的秩相等。

让我们来证明一下。若将图G的关联矩阵 A_e 的n行全部相加，则其元素全部为零(以下加法全都以 2 为模)，所以，根据矩阵的秩的定义，A_e 的秩 $r(A_e)<n$，即

$$r(A_e)\leqslant n-1 \tag{3.5}$$

其次，让我们通过矩阵的初等变换来说明$r(A_e)\geqslant n-1$。在连通图的 A_e 中，各列中元素 1 总是有两个，因此(假如必要的话)能够将 A_e 的行与列适当变换，重新排列，而使第(1,1)元素成 1，其结果为

$$A_e=\begin{array}{c} i_1 \\ \\ \\ \\ i_k \\ \\ \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{c|ccc} \overset{e_{j1}}{1} & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \hline 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{array}\right] \tag{3.6}$$

假如有并联于 e_{j1} 的边，其列的排列跟 e_{j1} 相同。

若将 i_1 行与 i_k 行相加，则矩阵为

$$A_e^{(1)}=\begin{array}{c} i_1 \\ i_1(i_k) \\ \\ \end{array}\left[\begin{array}{c|ccc} \overset{e_j}{1} & 1 & \cdots\cdots & 1 \\ \hline 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & \vdots & A_e^{(-1)} & \vdots \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{array}\right] \tag{3.7}$$

式 (3.7) 的子矩阵 $A_e^{(-1)}$，根据前述性质，是 $G_{i_1(i_k)}$ 的关联矩阵。$G_{i_1(i_k)}$也是连通图，所以若跟 $A_e\to A_e^{(1)}$ 的处理过程一样进行行列变换，把 $A_e^{(-1)}$ 的第(1,1)元素，即 $A_e^{(1)}$ 的第(2,2)元素变换成 1，则成为式(3.8)。即

$$
A_e^{(1)}=\begin{array}{c}i_1\\ i_2\\ \vdots\\ i_l\\ \vdots\end{array}
\left[\begin{array}{c|c|c|ccc|ccc}
1 & 0 & \cdots\cdots & \overbrace{0 & & 0}^{\text{在 } G_{i_1(i_2)} \text{ 中，有与 } e_{j_2} \text{ 并联的边时}} & & 1 & \cdots & 1\\
\hline
0 & 1 & & 1 & \cdots & 1 & & & \\
\vdots & & & & & & & 0 & \\
0 & 1 & & 1 & \cdots & 1 & & & \\
\vdots & & & & & & & & \\
0 & & & & & & & &
\end{array}\right]
$$

（列标：e_{j_1}，e_{j_2}）

若把 i_2 行与 i_l 行相加，则

$$
A_e^{(2)}=\begin{array}{r}i_1\\ i_2\\ i_2(i_l)\end{array}
\left[\begin{array}{c|c|ccc|ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 1\\
\hline
0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 1 & \cdots & 1 & & & \\
\hline
0 & 0 & & A_e^{(-2)} & & & 0 & & & 0 &
\end{array}\right]
\tag{3.8}
$$

（列标：e_{j_1}，e_{j_2}）

$A_e^{(-2)}$ 是在前面的图 $G_{i_1(i_2)}$ 中把两个顶点 i_2、i_l 短接，假如有自环就将其去掉后所得的图的关联矩阵。再者，i_2、i_l 即使是前面短接时所形成的顶点 $i_1(i_k)$ 也可以。这样的处理，一直持续到最后图变成孤立点。所以，假如最初的图 G 有 n 个顶点，那末对矩阵当然要进行 $n-1$ 次变换。因此，最后成为含有以 $n-1$ 阶的单位矩阵作为子矩阵的矩阵。

$$
A_e^{(n-1)''}=\begin{array}{c}i_1\\ i_2\\ \\ i_{n-1}\\ i_n\end{array}
\left[\begin{array}{cccc|ccc}
1 & & & 0 & & & \\
 & 1 & & & & & \\
 & & \ddots & & & & \\
0 & & & 1 & & & \\
\hline
0 & \cdots\cdots & \cdots & 0 & & &
\end{array}\right]
\tag{3.9}
$$

（列标：e_{j_1}　e_{j_2}　$\cdots\cdots$　$e_{j_{n-1}}$　$\cdots$　e_{j_b}）

根据行列式的秩的定义，可知

$$
r(A_e)\geqslant n-1 \tag{3.10}
$$

故根据式(3.5)和式(3.10)，得 $r(A_a)=n-1$。　　　　　　(证毕)

所谓连通图G的关联矩阵的秩是 $n-1$，就是意味着：若以前面的证明为例，则由式(3.9)，相对于 A_a 的顶点 $i_1, i_2, \cdots, i_{n-1}$ 的行向量 $\overline{i_1}, \overline{i_2}, \cdots, \overline{i_{n-1}}$ 是独立的，剩下的行向量($\overline{i_n}$)就是属于多余的行向量[*1]。可是，只要适当编排短接顶点的顺序，G的任意顶点就都可成为最后余下的顶点，即无论哪一个顶点都能形成式(3.9)的最后一行 i_n。因此能够得出结论：连通图的关联矩阵中任意一行都是从属于其余的$(n-1)$行的(即，在此连通无向图中，将$(n-1)$行全部相加，即可求得)。故从连通图的关联矩阵中去掉任意一行后所得的子矩阵（以 A 表示）的秩为 $n-1$。根据这样的理由，一般都使用从 A_a 中去掉一行后的基底关联矩阵[*2] A，去掉的行所代表的顶点叫做**参考顶点**(reference vertex)。

这种关联矩阵，特别在第五章要应用。

[4] 基底关联矩阵的最大阶数子矩阵与树的关系

在 2.2 节已说明过，在连通图中，有"树"这样的特殊子图，并暗示树与图的秩之间也存在着密切的关系。现在，设连通图G的顶点数与边数分别为n、b。虽然对什么是树尚未作过严格的定义，但从图 2.11 的例子也可以知道，所谓树就是含有n个顶点与$n-1$条边的G的连通子图。

对于图 2.11 的连通图 G，若以顶点 3 作为参考顶点，便可得如下的基底关联矩阵。

$$A=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\end{array}$$

*1　用代表行的编号的字母上带有一横来表示。

*2　通常所说的关联矩阵，就是这个基底关联矩阵。

$\boldsymbol{A}$ 的可能的最大阶数子矩阵是以下六个：

$$\boldsymbol{A}_{m1}=\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{matrix} a & b \\ \left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right. & \left.\right] \end{matrix} \qquad \boldsymbol{A}_{m2}=\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{matrix} a & c \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right. & \left.\right] \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{m3}=\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{matrix} a & d \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right. & \left.\right] \end{matrix} \qquad \boldsymbol{A}_{m4}=\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{matrix} b & c \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right. & \left.\right] \end{matrix}$$

$$\boldsymbol{A}_{m5}=\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{matrix} b & d \\ \left[\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right. & \left.\right] \end{matrix} \qquad \boldsymbol{A}_{m6}=\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \end{matrix}\begin{matrix} c & d \\ \left[\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right. & \left.\right] \end{matrix}$$

若计算一下各矩阵的行列式，则得 $|\boldsymbol{A}_{m1}|\neq 0$，$|\boldsymbol{A}_{m2}|\neq 0$，$|\boldsymbol{A}_{m3}|\neq 0$，$|\boldsymbol{A}_{m4}|\neq 0$，$|\boldsymbol{A}_{m5}|\neq 0$，$|\boldsymbol{A}_{m6}|=0$。看一下行列式不为零的最大阶数子矩阵的列所对应的边，就可看出，在 $\boldsymbol{A}_{m1}$ 中 $\{a, b\}$ 是树，$\boldsymbol{A}_{m2}$ 的 $\{a, c\}$ 也是树。最后，只有和 $\boldsymbol{A}_{m6}$ 的列对应的边不成为树。在图 2.11 中，对应于 $\boldsymbol{A}_{m1}$，$\boldsymbol{A}_{m2}$，…，$\boldsymbol{A}_{m5}$，图(b)—(f)中的树以 T_1，T_2，…，T_5 表示。

这样，基底关联矩阵上的最大阶数子矩阵与树有下述重要关系：在连通图 G 的基底关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 上，对应于它的最大阶数子矩阵的边集合成为树的充要条件是，$\boldsymbol{A}$ 的最大阶数子矩阵的行列式不为零*1。

我们运用至今所学到的知识，首先证明必要条件。设 $\boldsymbol{A}$ 的最大阶数子矩阵为 $\boldsymbol{A}_m$，假如对应于 $\boldsymbol{A}_m$ 的列的边集合是树，便说明 $|\boldsymbol{A}_m|\neq 0$。由于 $\boldsymbol{A}$ 中有 $n-1$ 行，这些行不仅代表 G 的除去参考顶点以外的顶点，同时也是树的顶点（去掉参考顶点），所以 $\boldsymbol{A}_m$ 是树的（基底）关联矩阵。然而，由于图的秩与该图的关联矩阵的秩

*1 正则的最大阶数子矩阵 $\boldsymbol{A}_m$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}_m|=1$（以 2 为模的运算）。

相等，所以树的秩为$(n-1)$，故以$r(A_m)=n-1$的A_m是$n-1$阶的方阵，$|A_m|\neq 0$。

关于充分条件的证明，作为本章的习题吧(参阅习题[11])。

3.4 割集矩阵

[1] 割集矩阵定义

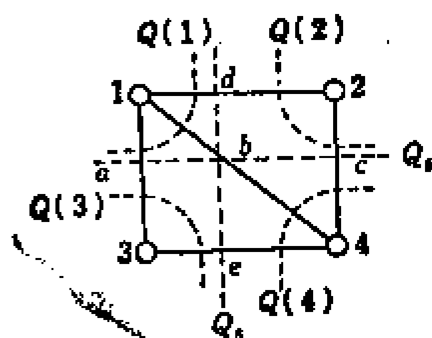
下面学习用矩阵表示图的割集的方法。这里仍使用连通图。首先，把割集及互质的几个割集的并集作为行，另一方面将边对应于列。能够像下面那样决定其元素q_{ij}值的矩阵$Q_e=[q_{ij}]_{p\times b}$叫做割集矩阵(cut-set matrix)。这里p是割集及互质的割集的并集的个数*1，b是边数。

$$q_{ij}=\begin{cases}1 & G\text{的边 }e_j\text{ 包含于割集或互质的割集的并集 }i\text{ 之中时}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}$$

在图3.13的图中，四个关联集合(也是割集)$Q(1)$、$Q(2)$、$Q(3)$、$Q(4)$，两个割集Q_5、Q_6，但由于互质的割集的并集$Q_7=Q(2)\oplus Q(3)=Q(1)\oplus Q(4)$，所以得出作为这个割集矩阵的式(3.11)。

$$Q_e=\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ Q_1=Q(1) & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ Q_2=Q(2) & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ Q_3=Q(3) & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ Q_4=Q(4) & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ Q_5 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ Q_6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ Q_7 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\end{matrix} \tag{3.11}$$

*1 p的值随图的结构而异，但对于顶点数为n的连通图来说，最大为$2^{n-1}-1$(参阅习题[8])。



由于图是简单的，所以割集与互质的割集的并集均容易看出。若图为复杂的，则必须依靠代数的或其他的方法。

图3.13 连通图G的割集(互质的割集的并集图中未表示)

这个矩阵中含有关联矩阵(最初的4行)

[2] 割集矩阵的秩

割集矩阵的秩是多大呢？当连通图G的顶点数为n时，G的割集矩阵 $\mathbf{Q}_e$ 的秩是 $n-1$。对这一点可作如下理解。如已经说过的那样，由于G的关联集合是割集或互质的几个割集的并集，所以G的关联矩阵 $\mathbf{A}_e$ 作为子矩阵包含于 $\mathbf{Q}_e$ 中。因此

$$r(\mathbf{Q}_e)\geqslant n-1 \tag{3.12}$$

另一方面，根据前节，任一割集都可用关联集合的环和来表示，所以 $\mathbf{Q}_e$ 的任一行应为代表关联集合的那些行的线性组合。由此

$$r(\mathbf{Q}_e)\leqslant n-1 \tag{3.13}$$

根据式(3.12)和式(3.13)，得

$$r(\mathbf{Q}_e)=n-1 \tag{3.14}$$

$\mathbf{Q}_e$ 的秩为 $n-1$。这意味着，$\mathbf{Q}_e$ 的任一行可从 $\mathbf{Q}_e$ 中独立的 $n-1$ 行(例如基底关联矩阵)求得。因此，从割集矩阵 $\mathbf{Q}_e$ 中选出 $n-1$ 行的子矩阵 $\mathbf{Q}$，当这个子矩阵的秩为 $n-1$ 时，一般就把 $\mathbf{Q}$ 叫做连通图G的**基底(或既约)割集矩阵**[*1] (basis cut-set matrix)。由于 $\mathbf{Q}$ 包含了 $\mathbf{Q}_e$ 的全部信息，所以多使用 $\mathbf{Q}$，特别在应用中不致

---

*1 通常所说的割集矩阵就是这个基底割集矩阵。

发生混乱的情况下，多把基底割集矩阵只说成割集矩阵。

例如，在式(3.11)的 $\boldsymbol{Q}_e$ 中

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{I}}=\begin{matrix} \\ Q(1) \\ Q(2) \\ Q(3) \end{matrix}\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right] \end{matrix} \tag{3.15}$$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{II}}=\begin{matrix} \\ Q(1) \\ Q_5 \\ Q_6 \end{matrix}\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right] \end{matrix} \tag{3.16}$$

两式都是 G 的基底割集矩阵。

$$\begin{matrix} \\ Q(1) \\ Q(2) \\ Q(3) \\ \hline Q(4) \\ Q_5 \\ Q_6 \\ Q_7 \end{matrix}\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right] \end{matrix}\begin{matrix} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}\right\}\text{设这个子矩阵为 } Q \\ \\ \leftarrow Q(1)\oplus Q(2)\oplus Q(3) \\ \leftarrow Q(1)\oplus Q(2) \\ \leftarrow Q(1)\oplus Q(3) \\ \leftarrow Q(2)\oplus Q(3) \end{matrix}$$

图 3.14 若在基底割集矩阵中找出基底关联矩阵，则不管图怎样复杂，只要在计算时加上虚线，考虑 $\boldsymbol{Q}$ 的行向量的所有可能的组合，通过以 2 为模的运算形式，就能求得全部割集

在割集矩阵 $\boldsymbol{Q}_e$ 的基底割集矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 中，虽然行的全体不一定代表割集，但 $\boldsymbol{Q}$ 的秩必定是 $n-1$。由于 $\boldsymbol{Q}_e$ 的全部行都可以用对应的图的基底关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行的线性组合来表示，所以，当然也可以从 $\boldsymbol{A}$ 求得 $\boldsymbol{Q}$，并且秩是 $n-1$，跟 $r(\boldsymbol{A})$ 相同。因此，任意的基底割集矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 可用适当的 $(n-1)$ 阶的正则矩阵 $\boldsymbol{D}(|\boldsymbol{D}|\neq 0)$ 与 $\boldsymbol{A}$ 的乘积来表示。

$$Q = DA \tag{3.17}$$

这里,D 的元素是 1 或 0。

$$\begin{array}{c} Q \\ \| \\ \begin{array}{c} Q(1) \\ Q_5 \\ Q_6 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} D \\ \| \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} A \\ \| \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{c} Q(1) \\ Q(2) \\ Q(3) \end{array} \end{array}$$

图 3.15 $Q = DA$ 的意义

$\left\{\begin{array}{l} Q \text{ 的第 1 行是原封不动的取自 } A \text{ 的第 1 行} \\ Q \text{ 的第 2 行是 } A \text{ 的第 1 行与第 2 行之和} \\ Q \text{ 的第 3 行是 } A \text{ 的第 1 行与第 3 行之和} \end{array}\right\}$

作为典型的基底(既约)割集矩阵的例子，除了前述的关联矩阵外,还有基本① 割集矩阵 *1 之类的矩阵。

[例题] 1 在图 3.12 中,试求 $G_{1(4)}$的关联矩阵。

[解答] 因为 $G_{1(4)}$是将顶点 1、4 短接后的图，所以在G 的关联矩阵 A_a 中把顶点 1 的行向量(图中第 1 行) 加到顶点 4 的行向量(第 4 行)上。在新的 1 (4)行上没有变成 2 的元素,所以不形成路径,且这种情况下只要去掉第 1 行就可以了。因此,$G_{1(4)}$的关联矩阵为

$$A_a = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 1(4) \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

[例题] 2 从式(3.15) 及式(3.16)的各割集矩阵，试检验式(3.11)的剩余的行是作为线性组合而得出的。

[略解] 下面实行以 2 为模的加法。

---

① 原文为基底割集矩阵,似误。——译者

*1 参阅 4.4 节。

(i) 从式(3.15)的 Q_I，得

$$\bar{Q}_4 = 1\cdot\overline{Q(1)} + 1\cdot\overline{Q(2)} + 1\cdot\overline{Q(3)}$$

$$\bar{Q}_5 = 1\cdot\overline{Q(1)} + 1\cdot\overline{Q(2)} + 0\cdot\overline{Q(3)}$$

$$\bar{Q}_6 = 1\cdot\overline{Q(1)} + 0\cdot\overline{Q(2)} + 1\cdot\overline{Q(3)}$$

$$\bar{Q}_7 = 0\cdot\overline{Q(1)} + 1\cdot\overline{Q(2)} + 1\cdot\overline{Q(3)}$$

(ii) 从式(3.16)的 $Q_{II} = \begin{bmatrix} \overline{Q(1)} \\ \overline{Q(5)} \\ \overline{Q(6)} \end{bmatrix}$，得

$$\bar{Q}_2 = 1\cdot\overline{Q(1)} + 1\cdot\bar{Q}_5 + 0\cdot\bar{Q}_6$$

$$\bar{Q}_3 = 1\cdot\overline{Q(1)} + 0\cdot\bar{Q}_5 + 1\cdot\bar{Q}_6$$

$$\bar{Q}_4 = 1\cdot\overline{Q(1)} + 1\cdot\bar{Q}_5 + 1\cdot\bar{Q}_6$$

$$\bar{Q}_7 = 0\cdot\overline{Q(1)} + 1\cdot\bar{Q}_5 + 1\cdot\bar{Q}_6$$

3.5 有向图的矩阵表示

在本节中，学习有向图的关联矩阵与割集矩阵的表示法。有向图的定义与性质跟无向图的情况几乎相同，唯一的区别是存在边的方向问题。

在无向图的矩阵中，采用{0,1}两个数值，实行以 2 为模的加法。相对于此，在有向图中为了表示边的方向，用{0,1,−1}三个数值；对于矩阵的秩的计算，按通常的实数运算。

[1] 有向图的关联矩阵

对于具有 b 条有向边、n 个顶点的连通有向图[*1]，其关联矩阵 A_a 是 n 行 b 列且像下面那样确定其元素。设 $A_a = [a_{ij}]$，a_{ij} 是 0，1，−1 中的哪一种，取决于下述的联接关系。

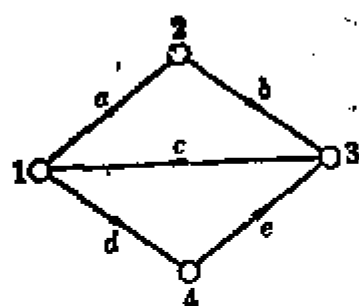
---

*1 所谓有向图是连通的，就是指忽略边的方向后的无向图是连通的。

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{当边 } e_j \text{ 与顶点 } i \text{ 联接且边的方向为从顶点 } i \text{ 指向其他顶点时}\\ -1 & \text{当边 } e_j \text{ 与顶点 } i \text{ 联接且边的方向为从其他顶点指向顶点 } i \text{ 时}\\ 0 & \text{边 } e_j \text{ 不与顶点 } i \text{ 关联时}\end{cases}$$

例如，图3.16中，有向图的关联矩阵为

$$A_a=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}a & b & c & d & e\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array} \tag{3.18}$$



$$A=\begin{array}{c} \\ 1\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}a & b & c & d & e\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

1行+3行+4行=[1 −1 0 0 0]

将 A 的行向量相加后乘以(−1)便得参考顶点2的行向量

图3.16 有向图及其关联矩阵

> 有向边通常具有两个端点，所以关联矩阵的各列通常存在一个1和一个−1，且若将每列的全部元素相加便成为0。

连通有向图的关联矩阵 A_a 的秩为 $n-1$（在3.3节已经证明，无向连通图如果有 n 个顶点，则其关联矩阵的秩是 $n-1$。在有向图的情况下，用和无向图完全相同的方法也能证明。希望读者自行试证）。从连通有向图的 A_a 中去掉任意一行所得的子矩阵就叫做有向图的**基底关联矩阵**[*1]（以 A 表示），去掉的行所代表

---

*1 通常所说的关联矩阵就是这个基底关联矩阵。

的顶点叫做参考顶点。不言而喻，基底关联矩阵的$(n-1)$行的向量是线性独立的，A_e 的任一行从属于其余的行。

在无向图的基底关联矩阵中，其正则的最大阶数子矩阵的行列式是 1（以 2 为模），但在有向图的情况下，却成为 1 或 -1（证明见例题 1）。并且这种正则的最大阶数子矩阵的列就代表有向图的林（或树）。反之，如果最大阶数子矩阵 A_m 的列代表林（或树），则不管 $|A_m|=1$ 或 -1，都跟无向图的情况完全相同。例如，若将图 3.16 中 A_m 选作

$$A_m=\begin{matrix} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\begin{matrix} a & c & d \\ \left[\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right] \end{matrix}$$

则 $|A_m|=-1$，$\{a, c, d\}$就构成树。

[2] 树（或林）的数目

至此，我们可以学习关于图的树（或林）的种种性质，以及基底关联矩阵的正则最大阶数子矩阵跟树（或林）的对应关系等。那么，一个给定的图，倒底有多少种树呢？对于这个问题，可利用有向图的关联矩阵的正则最大阶数子矩阵，其行列式的值为 1 或 -1，且该矩阵的列代表树（或林）这一特点，按下式求得答案。

$$|AA^t|=\text{有向图的树（或林）的总数}$$

这个公式之所以成立，是基于下列理由。首先，根据有关行列式的公式

$$|AA^t|=\sum A \text{ 及 } A^t \text{ 所对应的最大阶数子行列式的乘积}$$
$$=\sum_{i=1}^{k}|A_{mi}|\cdot|A_{mi}^t|$$

式中，k 表示 A 中可能的所有最大阶数子矩阵，因此组合数 k 是

$$h=\binom{b}{b-n+p}$$

b、n、p 分别是边数、顶点数、连通片的个数。

由于在上式中只要考虑正则的 A_{mt} 就能解决问题，因此得出下式

$$|AA^t|=\sum|A_{mt}|\cdot|A_{mt}^t|$$

可是，因为 $|A_{mt}|=1$ 或 -1，所以 $|A_{mt}|\cdot|A_{mt}^t|=1$。$A_{mt}$ 的列代表树（或林），所以 $|AA^t|$ 表示树（或林）的数目。具体的例子见例题2。

再者，这个公式是适用于有向图的。因此，想要求出无向图的树（或林）的总数时，只要在图的全部边上随意加上方向，利用得出的有向图的基底关联矩阵就可以了。

[3] 有向图的割集矩阵

在有向图中适当去掉一些边，也能把图分成两个部分。从这点出发就可以定义有向图的割集。所谓有向图的割集，就是在忽略该图的边的方向后所得到的无向图的割集中，把属于该割集的边用原来的有向边去置换后所得的边集合。例如，图 3.17 中的边集合$\{b, d, e, f\}$和$\{b, c, f\}$等就是割集。

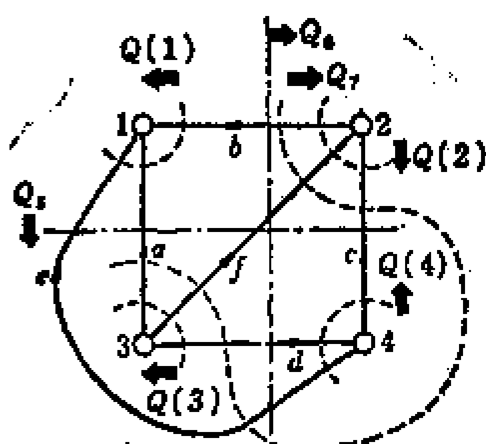


图 3.17 连通有向图及其有向割集（图中，没有互质割集的并集）

我们已经知道，无向图的割集 Q 可由下式给出：

$$Q=E(\Omega_1\times\Omega_1^c)=E(\Omega_1^c\times\Omega_1) \tag{3.19}$$

$E(\Omega_1\times\Omega_1^c)$ 表示 Ω_1 的各个顶点与其余的各个顶点之间的所有的边，Ω_1表示从图中去掉割集的所有的边之后剩下的两个连通子图

中的一个连通子图的顶点集合。现在，让我们在无向图的边上随意加上方向而使其成为有向图。于是，根据有向图的割集的定义，割集就成为从 Ω_1 的顶点指向其余顶点的边的集合与逆向边（即从 Ω_1^c 指向 Ω_1 的边）的集合的并集，所以有向图的割集 $\boldsymbol{Q}$ 为

$$\boldsymbol{Q}=E(\Omega_1\times\Omega_1^c)\cup E(\Omega_1^c\times\Omega_1) \tag{3.20}$$

对于前例的割集 $\{b, d, e, f\}$ 来说，$\Omega_1=\{1, 3\}$，$\Omega_1^c=\{2, 4\}$，$E(\Omega_1\times\Omega_1^c)=\{d, f\}$，$E(\Omega_1^c\times\Omega_1)=\{b, e\}$，所以，很明显，$\{b, d, e, f\}=\{d, f\}\cup\{b, e\}$。

有向图的割集，根据定义，并从集合论的观点，在本质上跟无向图的割集是相同的。所以，跟无向图的情况一样，有向图的任一割集都可以表示成关联集合的环和。现设式（3.20）的 $\Omega_1=\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$，$\Omega_1^c=\{v_{m+1}, \cdots, v_n\}$，则在数学表达式上，割集可用关联集合的环和表示为

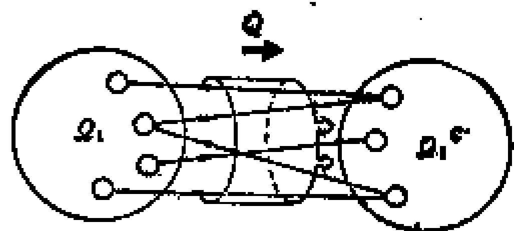
$$Q=Q(v_1)\oplus Q(v_2)\oplus\cdots\oplus Q(v_m) \tag{3.21}$$

此处

$$Q(v_i)=E(\{v_i\}\times\{v_i^c\})\cup E(\{v_i^c\}\times\{v_i\})(1\leqslant i\leqslant m) \tag{3.22}$$

例如，对于图 3.17 中 $\{a, c, e, f\}$ 这样的割集来说，$Q(1)=E(\{1\}\times\{2, 3, 4\})\cup E(\{2, 3, 4\}\times\{1\})=\varnothing\cup\{a, b, e\}$；同样，$Q(2)=E(\{2\}\times\{1, 3, 4\})\cup E(\{1, 3, 4\}\times\{2\})=\{b\}\cup\{f, e\}$。所以，由 $Q(1)\oplus Q(2)=\{a, b, e\}\oplus\{b, c, f\}=\{a, c, e, f\}$ 表示的顶点 1、2 的关联集合的环和就是这个割集。

为了把有向图的割集用矩阵表示，在所有的割集或互质的几个割集的并集上给出适当的“方向”。图 3.18 就表示了这种样子，把割集（或互质的割集的并集）Q 的方向表示为从 Ω_1 指向 Ω_1^c。若设有向图具有 b 条边 e_1、e_2、…、e_b，该图的割集矩阵 $\boldsymbol{Q}_e$ 的行就代表所有可能的割集与互质割集的并集，而列代表边，$\boldsymbol{Q}_e$ 的 (i, j) 元素 q_{ij} 给定为下列值：



在有向图的割集矩阵中，如果不给割集加上方向，
就无法知道割集中的边按哪个方向从属于割集。

图 3.18　在有向图中给割集加上适当的方向

$$
q_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{边 } e_j \text{ 属于割集（或互质割集的并集）} \\ & Q_i\text{，且 } Q_i \text{ 与 } e_j \text{ 方向一致时} \\ -1 & \text{边 } e_j \text{ 属于割集（或互质割集的并集）} \\ & Q_i\text{，且 } Q_i \text{ 与 } e_j \text{ 方向相反时} \\ 0 & \text{边 } e_j \text{ 不属于 } Q_i \text{ 时} \end{cases} \tag{3.23}
$$

在图 3.17 中用切割边的虚线表示割集，割集的方向由箭头的方向确定。例如，割集 $Q_2=Q(2)=\{b, c, f\}$ 的方向取从 $\Omega_1=\{2\}$ 到 $\Omega_1^c=\{1,3,4\}$为正方向，边 b 与 Q_2 的方向一致，但边 c 与 Q_2 是反方向。这样，此图的割集矩阵为

$$
\begin{array}{r} \\ Q_1=Q(1) \\ Q_2=Q(2) \\ Q_3=Q(3) \\ \boldsymbol{Q}_e= Q_4=Q(4) \\ Q_5=Q(1)\oplus Q(2) \\ Q_6=Q(1)\oplus Q(3) \\ Q_7=Q(1)\oplus Q(4) \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} \tag{3.24}
$$

任一割集可以用几个关联集合的环和来表示，但在有向图的情况下，对应的割集的行向量是否也为关联集合的行向量的简单的和呢？即行向量的线性组合的系数仍用{0,1}是否足够呢？下面用例子来说明。在式(3.24)中，$Q_5=Q_1\oplus Q_2$，但若设割集 Q_3、Q_1、

Q_5 所表示的行向量分别为 $\bar{Q}_5$，$\bar{Q}_1$，$\bar{Q}_2$，则 $\bar{Q}_1+\bar{Q}_2=[1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]+[0\ 1\ -1\ 0\ 0\ -1]=[1\ 2\ -1\ 0\ 1\ -1]$，不等于 $\bar{Q}_5=[-1\ 0\ -1\ 0\ -1\ -1]$，正确的结果应是 $\bar{Q}_5=-\bar{Q}_1+\bar{Q}_2$。这样，假如割集是像式(3.21)那样有 m 个关联集合的环和，那末对应的行向量的运算应按下面那样的行向量的线性组合来书写。

$$\bar{Q}=k_1\overline{Q(1)}+k_2\overline{Q(2)}+\cdots+k_m\overline{Q(v_m)}=\sum_{j=1}^{m}k_j\overline{Q(v_j)} \quad (3.25)$$

这里，$k_j=1$ 或 -1。　　$(1\leqslant j\leqslant m)$。

[4] 线性组合系数的确定

对于上式的系数，考虑到关联集合的方向与割集的方向，便可像下面那样简单地确定。还有，所说的这些方向，应是与关联集合和割集有关的共同的边。

$$k_j=\begin{cases}1 & \text{关联集合 } Q(j) \text{的方向与割集} Q \text{的方向一致时}\\ -1 & \text{关联集合 } Q(j) \text{的方向与割集} Q \text{的方向相反时}\end{cases} \quad (3.26)$$

让我们来确定图 3.17 和式(3.24)的割集矩阵的全部系数。对 $Q_5=Q(1)\oplus Q(2)$，设

$$\bar{Q}_5=k_1\overline{Q(1)}+k_2\overline{Q(2)} \quad (3.27)$$

首先，着眼于 $Q(1)$ 与 Q_5 中共同的边集合 $\{a, e\}$，$Q(1)$ 的方向如虚线所示，从顶点 3、4 到顶点 1 的方向为正向，而 Q_5 的方向与 $Q(1)$ 的方向相反，所以 $k_1=-1$。同样，$Q(2)$ 与 Q_5 中共同的边集合是 $\{c, f\}$，$Q(2)$ 的方向是从顶点 2 指向顶点 3、4，与 Q_5 的方向一致，所以 $k_2=1$。从而 $\bar{Q}_5=-\bar{Q}_1+\bar{Q}_2$。事实上，$-\bar{Q}_1+\bar{Q}_2=-[1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]+[0\ 1\ -1\ 0\ 0\ -1]=[-1\ 0\ -1\ 0\ -1\ -1]$，这个向量等于 $\bar{Q}_5$。

在有向图的割集矩阵中，任意一行都可用代表关联集合的向量如式(3.25)那样来表示，这种情况下，不一定要假定行向量是对

应于全部独立的关联集合的行向量。然而，在一般情况下，用独立的$(n-1)$个关联集合$Q(1)$，$Q(2)$，…，$Q(n-1)$行向量$\overline{Q(1)}$，$\overline{Q(2)}$，…，$\overline{Q(n-1)}$就可以表示任意的行向量，因此，对于不需要的行向量，其对应系数当作0，于是，$\bar{Q}$可表示为

$$\bar{Q}=\sum_{j=1}^{n-1} k_j \overline{Q(j)} \tag{3.28}$$

但是，在$k_j=-1$、0或1中，就1与-1而言，应服从式(3.26)。

[5] 有向图的割集矩阵的秩和基底割集矩阵

跟无向图的情况完全相同，对于顶点数为n、边数为b的连通有向量，其割集矩阵的秩为$(n-1)$。关于这一点的证明和$\boldsymbol{Q}_a$的物理意义，除去“方向性”之外，跟无向图是一样的。而且，从割集矩阵$\boldsymbol{Q}_a$中选出适当的$(n-1)\times b$的子矩阵$\boldsymbol{Q}$，如果其秩数是$n-1$，则该矩阵$\boldsymbol{Q}$就叫做连通有向图的**基底(既约)割集矩阵**[*1] (basis cut-set matrix)，当不致发生混淆时，就简称为割集矩阵。对于图3.17，若从式(3.24)中选出$\bar{Q}_1$、$\bar{Q}_5$、$\bar{Q}_6$，则可知它们是独立向量；从集合论来说，Q_1、Q_5、Q_6分别包含关联集合$Q(1)$、$Q(2)$、$Q(3)$，所以容易想象出它们是互相独立的。这样，下式就是图3.17的一个基底割集矩阵。

$$\boldsymbol{Q}=\begin{matrix} Q_1 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{matrix}\overset{\begin{matrix} a & \;\; b & \;\; c & \;\; d & \;\; e & \;\; f \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}$$

根据定义，有向图的关联矩阵也是基底割集矩阵。而且，割集或互质的割集可以用关联集合的环和表示。对割集矩阵来说，它的任一行都能用对应于关联集合的向量的线性组合[式(3.28)]来

---

*1 通常所说的割集矩阵就是这个基底割集矩阵。

表示。因此，有向图的割集矩阵 Q，可以从该图的关联矩阵，通过以 $-1,0,1$ 为元素的正则矩阵来求得。从而可用下式表示

$$Q=DA \tag{3.29}$$

图 3.19 是说明当分别选择基底割集矩阵（如前例所示）和关联矩阵 A（如图中所示）时正则矩阵 D 的例子。这个矩阵 D 的行列式 $|D|=1\neq 0$，显然 D 是正则的。

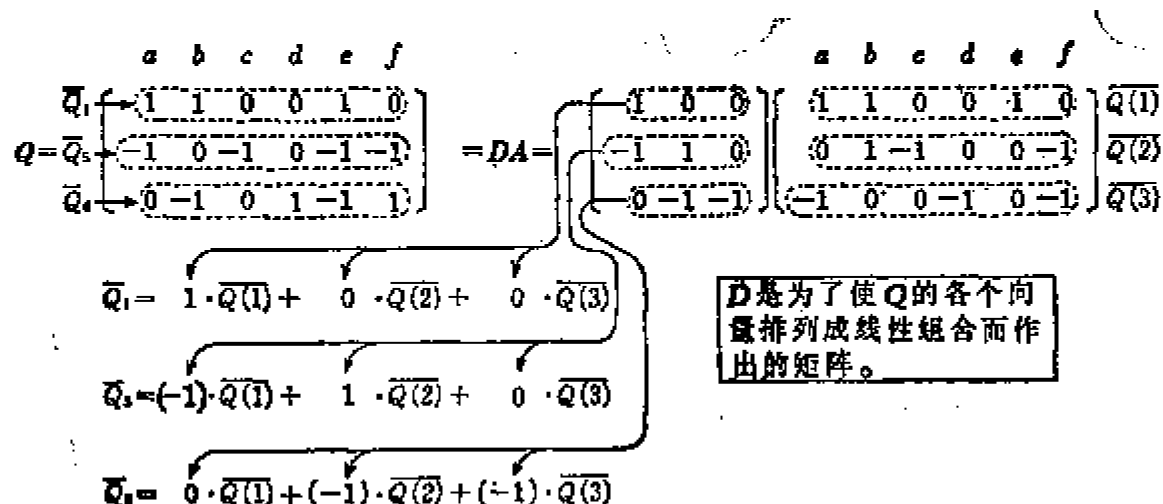


图 3.19 关于有向图的 $Q=DA$ 的意义

［例题］1 对于有向图的基底关联矩阵 A，试证明其正则的最大阶数子矩阵的行列式为 1 或 -1。

［证明］ 设 A 的正则最大阶数子矩阵为 A_m。在 A_m 中仅存在一个具有非零元素的列。设此元素为 a_{ij}，则 $a_{ij}=1$ 或 -1。把 $|A_m|$ 用 a_{ij} 展开，则

$$|A_m|=a_{ij}(-1)^{i+j}|A_m(\tfrac{i}{j})|=\pm|A_m(\tfrac{i}{j})|$$

这里，$A_m(\frac{i}{j})$ 表示从 A_m 中去掉第 i 行和第 j 列之后的子矩阵。在 $A_m(\frac{i}{j})$ 中也仅存在一个具有非零元素的列。假如不存在，则 $|A_m(\frac{i}{j})|=0$，$|A_m|=0$，结果是矛盾的。因而，若把其元素（$=1$ 或 -1）当作 a_{kl} 的 $|A_m(\frac{i}{j})|$ 按 a_{kl} 展开，则

$$|A_m|=\pm a_{kl}(-1)^{k+l}|A_m(\tfrac{i\,k}{j\,l})|$$

$A_m(\frac{i\,k}{j\,l})$ 表示从 $A_m(\frac{i}{j})$ 中去掉第 k 行和第 l 列之后的子矩阵。这个

做法继续下去，最后结果就成为 $|A_m|=1$ 或 -1。

〔例题〕2　试求图 3.16 中有向图的全部的树。

〔解答〕　利用该图的适当的关联矩阵，例如以顶点 4 作为参考顶点的基底关联矩阵 A，则

$$AA^t=\begin{matrix} & a & b & c & d & e \\ & \end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

所以

$$|AA^t|=8$$

因而可知 G 的树的总数有 8 个。

其次，求正则的最大阶数子矩阵。由于对应的最大阶数子矩阵，存在着互相转置的关系，所以

$|AA^t|=\sum(A$ 的最大阶数的子行列式$)^2$

$$=\left(\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}_{a\,b\,c}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{vmatrix}_{a\,b\,d}\right)^2$$

$$+\left(\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\end{vmatrix}_{a\,b\,e}\right)^2+\left(\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}_{a\,c\,d}\right)^2$$

$$
+\left(\begin{vmatrix} \overset{a}{1} & \overset{c}{-1} & \overset{e}{0} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} \overset{b}{0} & \overset{c}{-1} & \overset{d}{1} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}\right)^2
$$

$$
+\left(\begin{vmatrix} \overset{b}{0} & \overset{c}{-1} & \overset{e}{0} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} \overset{b}{0} & \overset{d}{1} & \overset{e}{0} \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right)^2
$$

$$
+\left(\begin{vmatrix} \overset{c}{-1} & \overset{d}{1} & \overset{e}{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} \overset{a}{1} & \overset{d}{1} & \overset{e}{0} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}\right)^2
$$

在上式的右边第 1 项与第 9 项是 0，其他各项都是 1，所以值为 1 的各项中所表示的边都形成树。因而图 3.20 所示的子图都是G的树。

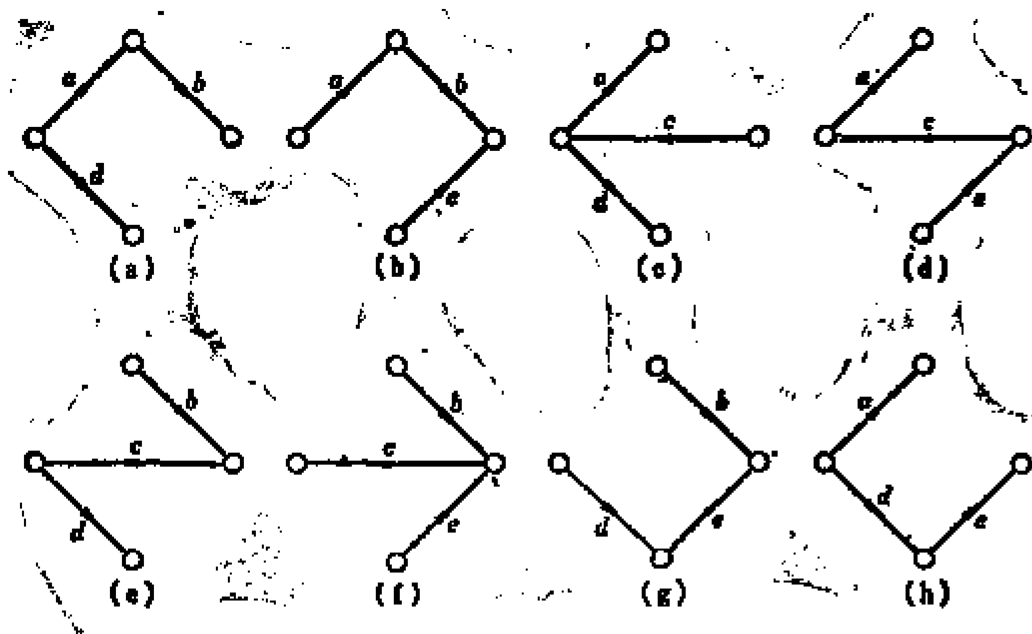


图 3.20　有向图G(图 3.16)的全部树

[例题] 3　试把图 3.17 的图中割集 Q_6、Q_7 的行向量[参阅式(3.24)]用关联集合的行向量$\overline{Q(1)}$、$\overline{Q(2)}$、$\overline{Q(3)}$ 的线性组合来表

示。

［解答］ 设 $Q_6=k_1\overline{Q(1)}+k_2\overline{Q(2)}+k_3\overline{Q(3)}$。因为 $Q_6=Q(1)\oplus Q(3)$，所以，先比较 Q_6 与 $Q(1)$ 的方向，可知方向是相反的，所以 $k_1=-1$。Q_6 与 $Q(3)$ 的方向也是相反的，所以 $k_3=-1$。由于没有 $Q(2)$ 这一项，所以 $k_2=0$。因而

$$\overline{Q}_6=(-1)[1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]+0\cdot[0\ 1\ -1\ 0\ 0\ -1]$$
$$+(-1)[-1\ 0\ 0\ -1\ 0\ -1]$$
$$=[0\ -1\ 0\ 1\ -1\ 1]$$

完全相同，由于 $Q_7=Q(2)\oplus Q(3)$，所以

$$\overline{Q}_7=0\cdot\overline{Q(1)}+(-1)\overline{Q(2)}+1\cdot\overline{Q(3)}$$

3.6 通讯网（网络流）

如果考虑一下电话线路网、水道、煤气和石油管道、公路网、运输网等，就可以说它们的共同点都是有物资或信息等某种量从某个地点往另一地点流动，这样的量一般就叫做流(flow)。

这样的网络流的构成能够用图来表示。顶点表示网络流的分岔点，即电话线路的局或管道的合流点，边表示在两个顶点（例如两个局）之间能直接传送信息和使流流动的传输线路或管路等。

［1］ 网络流问题

在这种图的各边上，通路的粗细等表示直接流过该边的两个顶点间的最大容量的值［叫做边容量或支路容量 (edge capacity)］。标有这种值（加权）的图就叫做**网络**(network)，或者叫做把流看作信息的通讯网(communication net)。关于网络与流的问题就叫做网络流(network flow)问题。

如在第一章已经说过的那样，实际的通讯网是复杂的，所流过的东西不只一种而是多种，并且是通过许多顶点间的流（多重流，

multi-commodity flow)。

本节为了学习作为通讯网的基础的福特-富尔克森(Ford-Fulkerson)的"**最大流-最小切割定理**"(max flow-min cut theorem)，所研究的通讯网仅限于无向连通图，在称作信号源与变换器的特定的两个顶点间给定一种流的问题。

图 3.21 是具有 4 个顶点的网络。在各边上标有直接流过边的两端间的（最大的）边容量。在图中对于像 $C_c=3$ 这种容量来说，它跟流的方向没有关系，例如，从顶点 2 到顶点 3 为 0.5，相反，从顶点 3 到顶点 2 为 2.5，总计容许通过的最大流为 3。

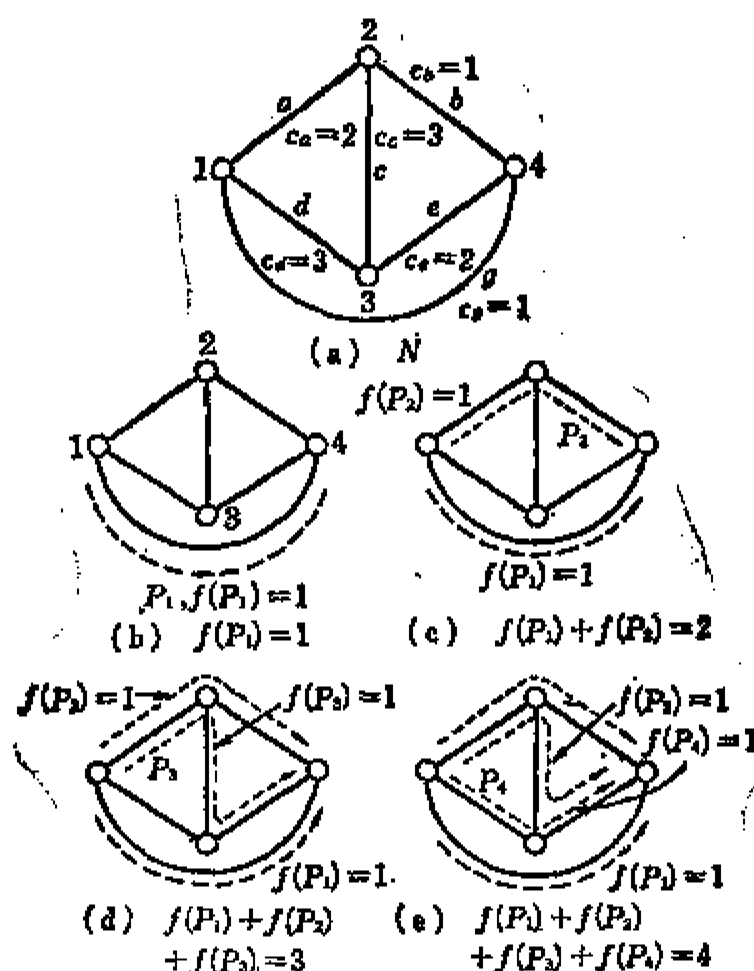


图 3.21 在网络 N 中路径与流的对应

现在，假定这个网络的边是输油管，中继基地为顶点 2、3，把油从基地 1 送到基地 4。油的流动有各种不同的途径，而油从基地 1 到达基地 4 的问题，就是从顶点 1 到顶点 4 的路径与流相对

应的问题。因此要研究一下把流的量依次分配给几条路径而形成的从顶点1到顶点4流动的最大量。

由于边g是顶点1、4间的路径，所以首先在这个路径$P_1=(g)$中把流量当作1来试试看。把这个流量表示为$f(P_1)=1$。由于g的边容量是1，所以$f(P_1)$的最大值是1。再设$P_2=(a, b)$，而a、b的边容量分别是2和1，所以对于路径P_2所分配的流为1[图(c)]，并且边b中的流不容许超过1。图(c)中从顶点1到顶点4的流量是$f(P_1)+f(P_2)=2$。此时若把各边中已經流过的流量扣除，只计算余下的容量（叫做剩余容量），则可以知道① $C'_a=1$，$C'_b=0$，$C'_c=3$，$C'_d=3$，$C'_e=2$，$C'_g=0$，并且仍然存在可赋于流量的路径。因为流通的方法并非一种，所以也可用$f(P_4)=1$代替P_2。

[2] 最大流-最小切割定理

如从上面的例子中所知道的那样，一方面，两个顶点间的流的值（全流量）取决于分配给各对应路径的流的方法，另一方面，在流过相同量的情况下又存在各种流通途径（即路径的选择）。那末，流过两个顶点间的最大量（流的最大值）到底是多少呢？并且它与网络的结构是否有关呢？

在两个顶点间赋于流的问题，就是把流量分别赋于两点间若干条路径的问题。如3.2节中已说明的那样，分割两个顶点的割集就是把该两点间的全部路径完全切断。换句话说，它意味着两个顶点间的任何路径都通过这个割集（即包含割集的边）（参阅习题[4]）。路径与流是对应的，所以，赋于路径的流的总和$\sum f(P_i)$，总是不大于属于这个割集的边的容量的总和（这个值叫做割集值

---

① 原文中$C'_a=2$, $C'_e=1$。——译者

或切割值)。这个事实可以说对于分割两顶点的任何割集都是符合的。所以,一般地说,从顶点 i 流向顶点 j $(i \neq j)$ 的最大流(记作 t_{ij}),完全被限制在分割两顶点的割集之中,以其割集的边容量的总和为最小的那种割集(叫做最小切割,minimum cut)为极限(注意,最小切割不一定是一个)。即

t_{ij}(从顶点 i 流向顶点 j 的最大流)

≤分割两顶点的最小切割的值(容量)

另一方面,可以证明,只要流量赋于路径的方法恰当,从 i 流向 j 的最大流,至少也能等于分割两顶点 i、j 的最小切割的值*1。这样,最小切割就如同狭小的瓶口一样。因此,在网络中,从顶点 i 流向顶点 j 的最大流等于分割两顶点 i、j 的最小切割的值。如果网络是连通无向图,从 i 流向 j 的最大流也是从 j 流向 i 的最大流(即 $t_{ij}=t_{ji}$)。这个 t_{ij} 就叫做两个顶点 i、j 间的**端子间容量**(terminal capacity)。

在图 3.21 中,分割顶点 1 与顶点 4 的割集有 $Q_1=\{a, d, g\}$,$Q_2=\{a, c, e, g\}$,$Q_3=\{b, e, g\}$,$Q_4=\{b, c, d, g\}$,各个割集的值分别是 6,8,4,8,最小切割是 Q_3。因此,顶点 1 与顶点 4 的端子间容量是 $t_{14}=4$。因为 Q_3 也为顶点 4 与其他两个顶点(2,3)间的最小切割,所以 $t_{14}=t_{24}=t_{34}=4$。同样,顶点 2 与顶点 3 间的最小切割是 $\{a, b, c\}$,$t_{23}=6$。

[3] 通讯网的矩阵表示与实现

一般地说,如果通讯网具有 n 个顶点,各端子间容量就能用矩阵的形式表示,这样的 n 阶方阵 $\boldsymbol{T}$ 就叫做**端子间容量矩阵***2 (ter-

---

*1 见参考文献 3)。

*2 见参考文献 3),7)。

minal capacity matrix)。如果通讯网N是无向图，则由于 $t_{ij}=t_{ji}$ $(1\leqslant i,\ j\leqslant n)$，$N$ 的端子间容量矩阵 $\boldsymbol{T}$ 便成对称矩阵。

例如，图 3.21(a)中的 $\boldsymbol{T}$ 如下式所示：

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} d & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & d & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & d & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & 6 & 6 & 4 \\ 6 & d & 6 & 4 \\ 6 & 6 & d & 4 \\ 4 & 4 & 4 & d \end{bmatrix}$$

不过，在这里不考虑相同顶点端子间容量。在符号上把 $\boldsymbol{T}$ 的对角线元素记作 $t_{ii}=d\ (1\leqslant i\leqslant 4)$。

可是，相对于一定矩阵(该矩阵的元素代表端子间容量)的网络能够实现吗？对于通讯网，其实现的可能条件是："使 n 次对称矩阵 $\boldsymbol{T}$ 成为无向通讯网的端子间容量矩阵的充要条件是，(1) $\boldsymbol{T}$ 是可以主划分*1 的(principal partition)，(2) 而且对于这个分割的结果所得的主子矩阵(main sub-matrix) 还能逐次进行主轴分割，总计进行$(n-1)$次主划分"。其证明是复杂的，请参考原著。在这里，用一个例子来说明。现在给出下列矩阵：

$$\boldsymbol{T}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} d & 2 & 2 & 2 \\ 2 & d & 4 & 3 \\ 2 & 4 & d & 3 \\ 2 & 3 & 3 & d \end{bmatrix} \end{array}$$

若将$\boldsymbol{T}$的行及列交换，则如用虚线所示那样，能够划分 $4-1=3$次。

---

*1 对角线元素全部是 d 的对称矩阵$\boldsymbol{M}$能够进行满足以下条件的划分时，这个划分就叫做主划分。$\boldsymbol{M}$(必要时将行及列交换)划分为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{M}_a & \boldsymbol{M}_c \\ \boldsymbol{M}_c^t & \boldsymbol{M}_b \end{bmatrix}$$

(1) $\boldsymbol{M}_c$ 的所有元素相等，在 $\boldsymbol{M}$ 中取最小值，(2) $\boldsymbol{M}_a$ 和 $\boldsymbol{M}_b$ 是对角线元素为 d 的方阵。$\boldsymbol{M}_a$ 与 $\boldsymbol{M}_b$ 叫做主划分结果所得主子矩阵。

$$
T=\begin{array}{c}\\2\\3\\4\\1\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}2&3&4&1\end{array}\\\left[\begin{array}{cccc}d&4&3&2\\4&d&3&2\\3&3&d&2\\2&2&2&d\end{array}\right]\end{array}\Rightarrow T=\begin{array}{c}\\2\\3\\4\\1\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}2&3&4&1\end{array}\\\left[\begin{array}{c|c|c|c}d&4&3&2\\\hline 4&d&3&2\\\hline 3&3&d&2\\\hline 2&2&2&d\end{array}\right]\end{array}
$$

所以，具有这个 T 的通讯网是可能实现的。作为它的一种构成方法，首先，对于最初的主划分，图 3.22(a)是可能的。对应于第二次、第三次的划分，分别如图(b)、图(c)所示，最终的图(c)就是实现 T 的一个通讯网。不言而喻，通讯网的构成，一般地说不是一种，像图 3.23 那样的完备图也能实现。

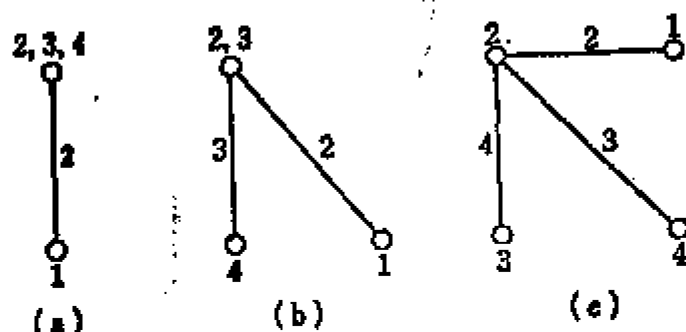


图 3.22　根据 T 的树实现通讯网

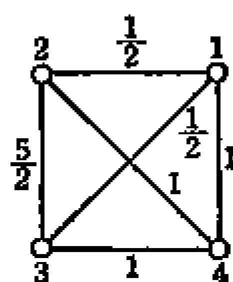


图 3.23　根据 T 的完备图实现通讯网

习　题

［1］ 设路径的顶点数及边数分别为 n、b，试证明有 $b=n-1$ 的关系。

［2］ 存在着双图①(bipartite graph)这样特殊的图。图 G 的顶点集合 V 能够分解成两个互质的子集 V_1 和 V_2 ($V_1\cup V_2=V$, $V_1\cap V_2=\varnothing$)，对于 G 的所有的边，它们的一个端点属于 V_1，另一个端子属于 V_2，能够进行这样分解的图 G 就叫做双图*1。试证明：此时 (1) 属于 V_1 (或 V_2)的顶点间的路径

---

① 双图(bipartite graph)，又叫对图，偶图，二分图。——译者

*1 这种图的问题，可以说是职业与希望就业者的关系、相亲与恋爱的关系、结婚问题等协调(匹配)问题(matching problem)。

的长度是偶数，(2) V_1 的顶点与 V_2 的顶点间的路径的长度是奇数。

［3］ 试证明：当割集 Q 不分割图 G 的 i、j 时，i、j 间存在着路径 P，使得 $P\cap Q=\varnothing$。

［4］ 试证明：当割集 Q 分割图 G 的 i、j 时，i、j 间的任一路径至少包含 Q 的一条边。

［5］ 试证明图 G 的任一顶点的关联集合是割集，或互质的几个割集的并集。

［6］ 试证明完备图中任一关联集合都为割集。

［7］ 试证明式(3.2)。

［8］ 在具有 n 个顶点的图中，成为割集的候补边集的组合总数最大是 $2^{n-1}-1$。

［9］ 试求图 3.24 的关联矩阵。

［10］ 试列举图 3.24 的所有割集（或互质的割集的并集），求割集矩阵。

［11］ 对于连通图 G 的基底关联矩阵 A，试证明对应于 A 的正则的最大阶数子矩阵 A_m 的列的边是 G 的树。

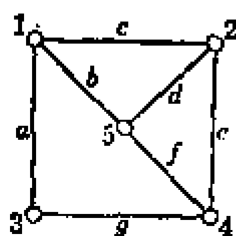


图 3.24

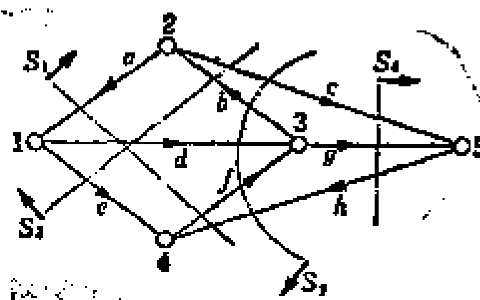


图 3.25

［12］ 在图 3.25 中，独立割集及其方向如图所示，试求基底割集矩阵。

［13］ 对于图 3.25 的有向图，试求该图的树的总数。

［14］ 对于连通有向图 G，试证明下列结论：

$$AA^t\text{ 的}\begin{cases}(i,i)\text{元素}(1\leqslant i\leqslant n)\\(i,j)\text{元素}(1\leqslant i,\ j\leqslant n)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}\text{关联于顶点 } i \text{ 的边的总数}\\\text{顶点 } i \text{ 与顶点 } j \text{ 间直接连接的边数的负值}\end{cases}$$

［15］ 连接 n 个顶点 v_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的树一共是多少？

［16］ 若设有向连通图 G 的基底割集矩阵为 Q，则由 $|QQ^t|$ 也可求得树的总数。为什么？

[17] 对于连通有向图 G,试证明下式:

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ B \end{bmatrix}\text{的行列式} = \pm(G\text{ 的树的总数})$$

[18] 对于图 3.26 的通讯网,试求端子间容量矩阵。

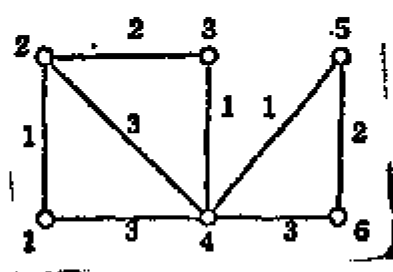


图 3.26

参 考 文 献

1) C. Berge: The Theory of Graphs and its Applications, John Wiley & Sons. Inc. (1962),尤其第 6 章

2) R. Bellman 他著・渡辺訳: 計算機のためのグラフとアルゴリズム, 共立出版(1972)

3) W. Mayeda: Graph Theory, Wiley-Interscience (1972)

4) W. Mayeda: Necessary and Sufficient Conditions for Realizability of Cut-set Matrices, IRE Trans. on CT., CT-7 (1960), p. 79—81

5) 伊理正夫: A Necessary and Sufficient Condition for a Matrix to be the Loop or Cut-set Matrix of a Graph and a Practical Method for the Topological Synthesis of Networks, RAAG Res. (1960)

6) W. Mayeda: Terminal and Branch Capacity Matrix of a Communication Net, IRE Trans. on CT., CT-7 (1960), p. 261—269

7) R. T. Chien: Synthesis of Communication Net, IBM J. Res. Develop., Vol. 3 (1960), p. 311—320

8) L. R. Ford and D. R. Fulkerson: Flows in Networks, Princeton University Press (1962)

9) W. H. Kim and R. T. Chien: Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia University Press, New York (1962)

10) 伊理正夫: Network Flows, Transportation and Scheduling, Academic

Press, New York (1969)

11) H. Frank and I. T. Frisch: Communication, Transmission, and Transportation Networks, Addison-Wesley Publishing Co. (1971)

12) M. Ito: Probabilistic Communication Net as a Nonoriented Graph, IEEE Trans. on Reliability, R-24, No. 3 (1975), p. 196—198

13) 伊東: 木を構造とする確率通信網の實現可能條件,電子通信學會論文誌(A), 58-A, No. 12, p. 751—758 (1975)

14) 翁長: 多重フロー定理,電子通信學會論文誌, 53-A (1960), p. 350—356

第四章　回　　路

【要点】 本章主要内容是讨论无向图的回路，但是在各节中所考虑的方法和性质几乎都适用于有向图。在4.5节中学习有向图回路的有关问题。

4.1 回路的性质

在第二章的开头曾引出“自环”一词。此名称表明，一个边的两个端点重合在一起，使自己形成一个“环”。由此可以得出，在一般情况下，路径的起点与终点是同一个点时就叫做回路(loop circuit*1)。这意味着以回路上的任一顶点作为出发点，无论朝哪个方向前进并巡回一周，仍回到原来的顶点。不言而喻，无向图的回路上没有方向性，所以不管怎样巡回都可以。例如，在图4.1的图G上，对于图(b)的子图，从适当的顶点(例如2)出发沿边循行，在途中不通过已经通过的顶点，最后又返回到原来的出发点（顶点

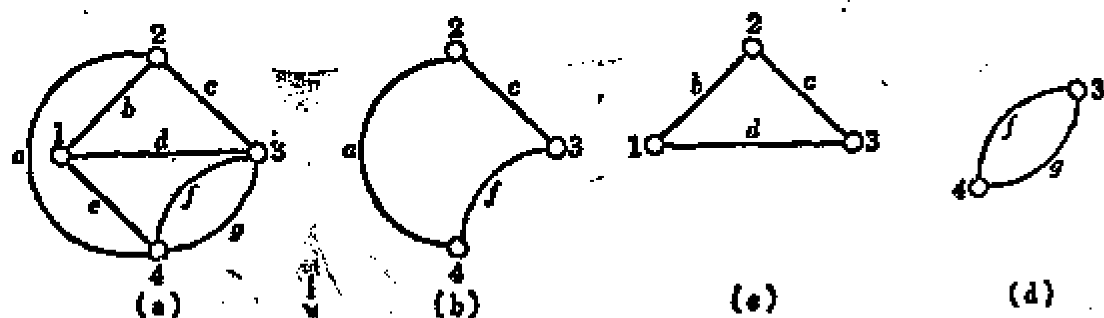


图4.1 (a)：图G；(b)、(c)、(d)：G的回路的例子

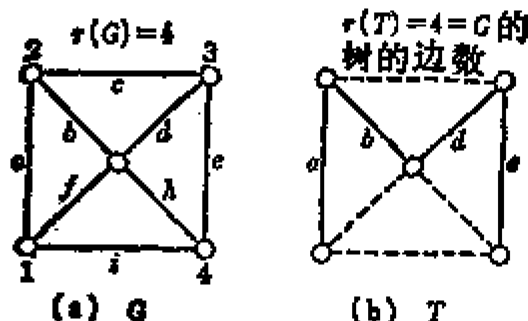
---

*1 回路，常常被说成“闭路”，但是，“回路”这种说法更加直观，所以在本书中宁愿采用“回路”而不叫做闭路。

2)，所以它是回路。由此很容易明白，图的回路是全部顶点的次数都为 2 的连通子图。

[1] 零度与补树的关系

现在，若取具有 n 个顶点的连通图 G，则其秩为 $r(G)=n-1$。对于具有同样 n 个顶点，没有回路的连通图 H，其秩同样是 $n-1$。在这个图 H 上，任何两个顶点间，只存在一条路径（因为假如有两条路径，便形成回路而违反条件）。例如，看一下图4.2(b)便可明白。此外，根据归纳法，可以证明 H 具有 $n-1$ 条边(参阅 5.3 节例题)。像图4.2那样，假如具有上述条件的图 H 为原来的图 G 的零图，则把 H 叫做 G 的树*1 (tree)。



在连通图的子图中，把具有相同顶点但没有回路的图叫做树，如图(b)的实线。

图4.2 (a)：连通图 G；(b)：用实线描绘的图 T 叫做树

反之，若在树上即使只加上一条边，也必形成回路。从而图的秩没有增加，但零度却增加了。一般说，若用新的边连接连通图的两个顶点，便至少出现一个包含这条边的新的回路，同时零度增加 1，这一点大概是很容易明白的。图的秩与零度之和，等于图的边的总数 b。即 $r(G)+n(G)=b$。因为 $r(G)$ 又等于树的边数（假定 G 是连通图），根据 $n(G)=b-r(G)$，所以图的零度跟补树*2 的边数相等。

假如 G 是连通的	$r(G)=$ 树的边(树支)的总数
	$n(G)=$ 补树的边(连支)的总数

*1 关于树的等价命题，参阅习题 1。树的边叫做树支(branch)。

*2 从 G 中去掉其树(T)之后，留下的子图就叫做补树(co-tree)，用 T^0 表示。补树的边叫做连支(chord, link)。

[2] 平面图的关联集合及其对偶图的回路

在图 4.3 中，平面图G及其对偶图 G^* 分别用实线和虚线描绘。对应于顶点 1 的关联集合 $Q(1)=\{a, b\}$，在对偶图中则成为$[a', b']$这样的回路；对应于 $Q(2)=\{b, c, d\}$，在 G^* 上就形成$[b', c', d']$*1 的回路。对偶图中对应的回路，常常包围着关联集合的顶点。如对于顶点 3 的关联集合$\{a, c, e\}$，有$[a', c', e']$回路对应着，假如像图(b)那样，把 e' 挪至左下方来描绘对偶图，这个回路就包围顶点 3 。

关联集合　　　　　　　回路

$Q(1)=\{a, b\}\to C_1'=[a', b']$

$Q(2)=\{b, c, d\}\to C_2'=[b', c', d']$

$Q(3)=\{a, c, e\}\to C_3'=[a', c', e']$

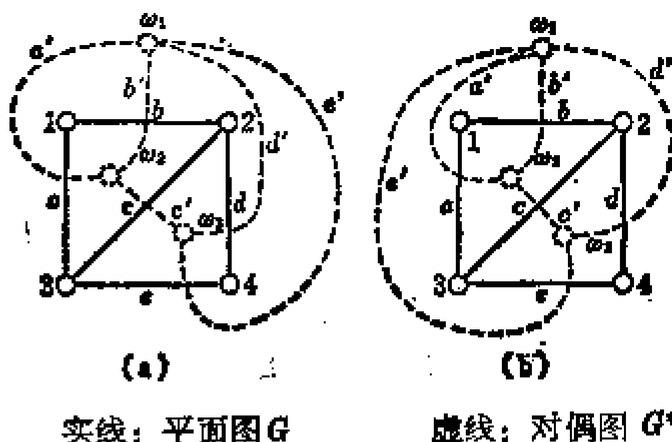
$Q(4)=\{d, e\}\to C_4'=[d', e']$

………………………………………………

$Q(\omega_1)=\{a', b', d', e'\}\to C_1=[a, b, e, d]$

$Q(\omega_2)=\{a', b', c'\}\to C_2=[a, b, c]$

$Q(\omega_3)=\{c', d', e'\}\to C_3=[c, d, e]$



实线：平面图G　　　　虚线：对偶图 G^*

图 4.3　在平面图及其对偶图上关联集合与回路的关系。在此例中，G 的关联集合在 G^* 中就成为回路，G^* 的关联集合在G 中也成为回路

一方面，在这个例子中，由于 G^* 的对偶图是 G，所以 G^* 的

*1　本书中规定用[　]代表回路。

关联集合在G中就对应于回路，这一点从图上也可明白。这样，若考察一下平面图任意顶点的关联集合的作用，就可看到该关联集合的边将平面分割成区域，这种区域通常以边作边界，顺着边界走就将返回到原来的位置。另一方面，我们知道，由于它的对偶图就是在区域中置入顶点、并把邻接区域中的顶点连接为边，所形成的回路[图 4.4(a)]。但是，像图 4.4(b)那样，当关联集合的边分割平面时，并非全都成为不同区域，关联集合不只对应于对偶图的一个回路。如对于图(b)的关联集合 $Q(4)=\{b, c, f, g, h\}$，对应着两个回路$[b', c', f']$ 和 $[h', g']$。实际上，像后面所说的那样，割集与回路对应。因为上述的 $Q(4)$ 为 $\{b, c, f\}$ 和 $\{g, h\}$ 两个割集的并集，所以 $Q(4)$必然对应于两个回路。

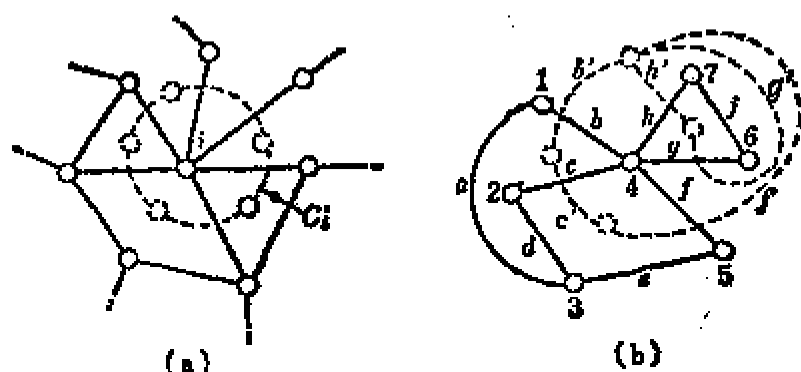


图 4.4 (a): 平面图的关联集合 $Q(i)$对应于对偶图中的回路 C_i' 的说明图
(b): 关联集合对应于互质的回路的并集的例子

[3] 平面图和对偶图中割集与回路的对应关系

现在，若在平面图上应用更一般的割集代替关联集合，那末又将变得怎样呢？以图 4.3 中G的割集$\{a, c, d\}$为例，可知对应的边$\{a', c', d'\}$在对偶图中成为回路，并且这个回路把从G中去掉这个割集后的一个连通片（即边b及其两个端点 1、2）包围在内部。

其次，若取平面图的回路，例如同图(a)的$[a, b, c]$，则在对偶图上对应的边的集合$\{a', b', c'\}$ 就成了顶点 ω_2 的关联集合。一

般地说，可以证明，G 的回路在 G^* 中就成为割集。因此，平面图的割集或互质的割集的并集在其对偶图中对应于回路或互质的回路的并集。这里省略证明。

作为平面图及其对偶图的重要性质之一是，在这两种图中，一方的图的秩与零度，分别等于另一方的图的零度与秩。这已在2.4节中叙述过。

不管平面图和非平面图，对于一般的图来说，4.4节的回路矩阵在代数上是方便的。根据这个矩阵和下一节的基本回路能够生成任意的回路。有向图的回路矩阵，将特别在第五章中应用。

〔例题〕1 画出图4.5(a)中平面图 G 的对偶图，(i) 试求 $r(G)$、$n(G)$、$r(G^*)$、$n(G^*)$；(ii)对应于下面列举的 G 的割集(也包括关联集合)，G^* 的回路是什么？$\{a, c\}$，$\{d, f, g, i\}$，$\{b, d, f, k\}$，$\{b, g, l\}$，$\{h, i, j\}$。(iii) 试求与下面列举的 G 的回路相对应的 G^* 的割集。$[c, a, d, f]$，$[b, d, i, l, j, e]$，$[b, d, f, h, k, l, j, e]$，$[a, c, h, k, l, j, e, b]$。

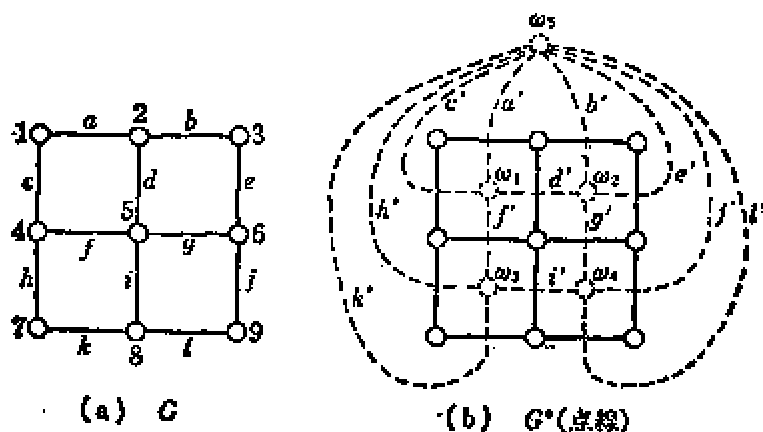


图4.5

〔略解〕 (i) G 上有五个区域，设对应于其各区域的 G^* 的顶点为 ω_1、ω_2、ω_3、ω_4、ω_5。$r(G) = n - 1 = 9 - 1 = 8$，$n(G) = b - r(G) = 12 - 8 = 4$，而 $r(G^*) = 5 - 1 = 4$，$n(G^*) = b - r(G^*) = 8$，即 $r(G) = n(G^*)$，$n(G) = r(G^*)$。

(ii) $\{a, c\} \to [a', c']$, $\{d, f, g, i\} \to [d', g', i', f']$, $\{b, d, f, k\} \to [b', d', f', k']$, $\{b, g, l\} \to [b', g', l']$, $\{h, i, j\} \to [h', i', j']$。

(iii) $[c, a, d, f] \to \{c', a', d', f'\}$（= 顶点 ω_1 的关联集合），$[b, d, i, l, j, e] \to \{b', d', i', l', j', e'\}$（= 分割 $\{\omega_2, \omega_4\}$ 与 $\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$的割集），$[b, d, f, h, k, l, j, e] \to \{b', d', f', h', k', l', j', e'\}$（= 分割$\{\omega_1, \omega_5\}$ 与 $\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$的割集），$[a, c, h, k, l, j, e, b] \to \{a', c', h', k', l', j', e', b'\}$（$=Q(\omega_5)$）。

[例题] 2 试证明下列两个命题是等价的。

(a) 所有顶点的次数是 2 的连通(子)图。

(b) 路径的始点与终点重合的图。

[证明] (b)→(a) 所谓路径，根据定义就是始点与终点的次数是 1、其他所有顶点的次数是 2 的连通图。由于把次数分别为 1 的始点与终点重合，所以该顶点的次数也成为 2，因而这个图与(a)的图等价。

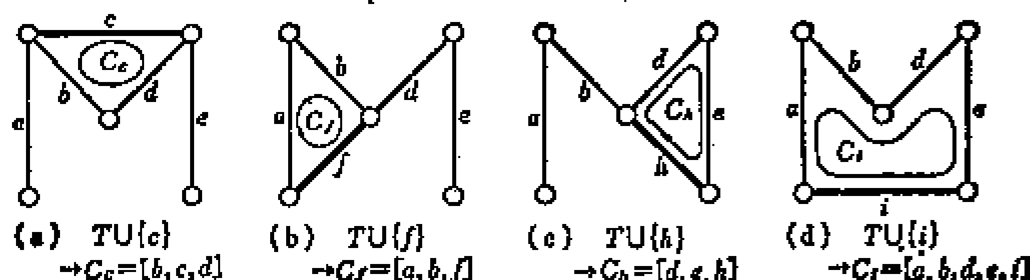
(a)→(b) 只要能证明有这样的边的序列就行了：若顺着边依次走下去，在途中不返回到同一顶点，通过最后的边时返回到作为出发点的最初的顶点。这个问题用归纳法来证明似更为简单。两个顶点的情况是最明显的，因而一般可以认为具有 k 个顶点的满足条件(a)的图跟(b)的图相同。现考虑具有 $(k+1)$ 个顶点的图。根据条件，无论通过哪条边，两个端点的次数都是 2，所以若将其任一条边短接，便形成所有顶点的次数都是 2 、顶点个数为 k 的连通图。对于这个图，因按照假定有上述的边的序列，所以是满足(b)的图。然后只要把短接了的边再恢复到原来的状态就行了。

4.2 基 本 回 路

已经讲过，连通图的秩就是所选定的包含G的全部顶点、且不

形成回路的G的连通子图的边数，即树的边数。由于在树的任意两个顶点间仅存在一条路径，所以若把补树的任意一条边联接到树的两个顶点上*1，就只能形成一个回路。

例如，假定选择图 4.2(a)中图G的树如同图(b)所示，即G的树的边集合为 $T=\{a, b, d, e\}$，补树 $T^c=\{c, f, h, i\}$。若将补树的边c加到图 4.6(a)的树T上，便得到回路 $c_c=[b, c, d]$。同样，将补树的边f, h, i顺次接到树上，便形成图(b)、(c)、(d)所示的回路C_f、C_h、C_i。像这样把补树的一个边接到树上而形成的回路就叫做**基本回路** (fundamental loop)，这种基本回路的数目仅仅等于补树的边数，即等于零度，因为 $n(G)=b-r(G)=G$的边的总数－树的边数＝补树的边数。在前例中，若考虑**基本回路集合** (set of fundamental loop)$\{C_c, C_f, C_h, C_i\}$，那末，由于各基本回路包含c、f、h、i这种补树的边，所以不管取哪一个基本回路都存在其他基本回路所没有的边。即，任一个基本回路都不能从其余的基本回路得到。因此，这种基本回路集合是独立回路集合，从而成为导出其他所有回路的生成元，即是形成任何回路的基本回路组合。



选定的图 4.2(a)中图的树如图 4.2(b)，把补树的边逐一加到树上便分别形成回路。

图 4.6 基本回路集合

除去图为其自身的树外，一般情况下，图有许多种树。因此，

---

*1 把补树的边接到树上时，跟边接到顶点上一样。

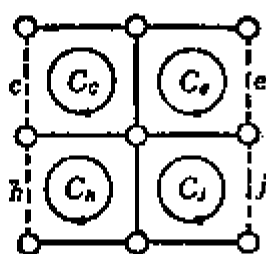
通常选择基本回路集合的方法也有好多种（实际上为图中所具有的补树的种类）。

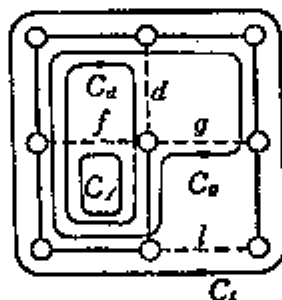
［**例题**］ 在图4.5(a)的G上，把G的树选成：(i) $T_1=\{a, b, d, f, g, i, k, l\}$①，(ii) $T_2=\{a, b, c, e, h, i, j, k\}$时，试求各基本回路集合。

［**略解**］ (i) 根据图 4.7(a)，补树为$\{c, e, h, j\}$，所以基本回路集$\{C_c, C_e, C_h, C_j\}$中的各个基本回路如下列所示。

$$C_c=[c, a, d, f] \qquad C_e=[e, g, d, b]$$

$$C_h=[h, f, i, k] \qquad C_j=[j, l, i, g]$$





(a)树：$T_1=\{a, b, d, f, g, k, i, l\}$ 补树：$T_2^c=\{c, e, h, j\}$

(b)树：$T_1=\{a, b, c, e, h, i, j, k\}$ 补树：$T_2^c=\{d, f, g, l\}$

图 4.7 由补树及其连支所得的基本回路

(ii) 据图(b)，补树 $T_2^c=\{d, f, g, l\}$，所以基本回路为$\{C_d, C_f, C_g, C_l\}$。这里，$C_d=[d, i, k, h, c, a]$，$C_f=[f, i, k, h]$，$C_g=[g, i, k, h, c, a, b, e]$，$C_l=[l, k, h, c, a, b, e, j]$。

4.3 欧 拉 图

［I］ 闭边列（欧拉回路）

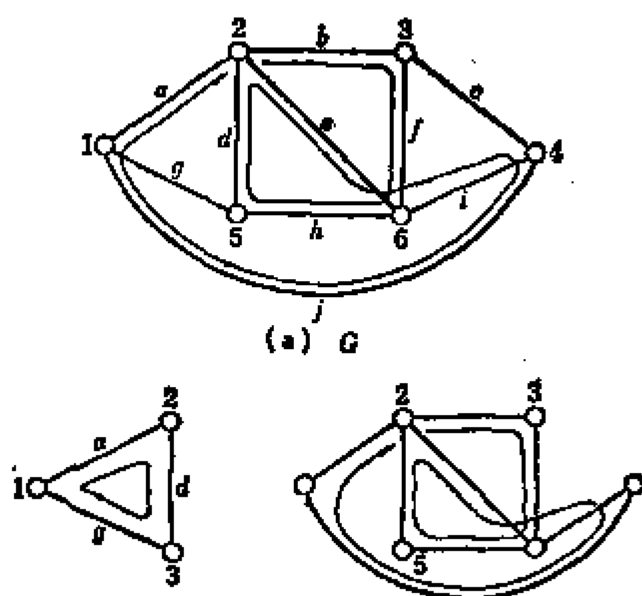
在不熟悉的道路上和迷路时会在同一个地方转来转去，这种情况是常有的。在图上，从某个顶点出发，对各条边只通过一次，

① 原文误为 $T_1=\{a, b, d, f, g, h, i\}$。——译者

逐个地走过各边，最后返回到原来的出发点，这样的闭合路径（边的序列）就叫做**闭边列***1 (closed edge train)。在闭边列上，各个边都仅出现一次，但途中所通过的顶点无论穿过多少次都可以，最后返回到原来的顶点上。按照定义，既有像图 4.8(b)那样作为回路的闭边列，也有像图(c)那样不是回路的闭边列。在闭边列上，就所通过的顶点来说，因为要通过联接在该顶点上的两个边，所以任何一个顶点的次数都是偶数。

若从顶点2出发，依次通过 $b\to f\to h\to d\to e\to i\to j\to a$ 等边，则各边仅仅通过一次，并返回到原来的顶点2，因此，由 $bfhdeija$ 组成的图是闭边列(图c)。

闭边列的所有顶点都有偶数的次数。



(b) 闭边列：adg　　(c) 闭边列：$bfhdeija$

图4.8 (a)：图 G；(b)、(c)：闭边列的例子

容易想像出，闭边列与有名的数学难题——一笔画问题密切相关。其意思就是，假如给定的图为闭边列，那末这个图便能一笔画出。这个判断定理来源于欧拉用图论解决了的那个著名的哥尼斯堡桥问题。在哥尼斯堡城(Königsberg，即现在的加里宁格勒)，普雷格尔(Pregel)河流过市区，并把克涅波(Kneiphof)岛分成两块，在此处河上共架有七座桥，如图 4.9 所示。其问题是，无论从 A、B、C、D 中哪一个地点出发都可以，但以每座桥仅通过一次

*1 也叫欧拉回路。

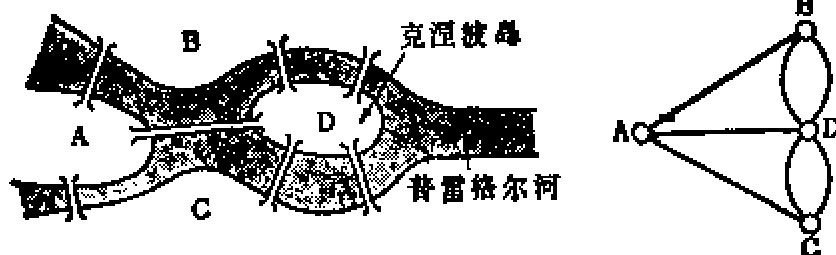


图 4.9 哥尼斯堡桥问题

作为条件，应怎样通过全部的桥？欧拉证明了这是不可能的，后来发表了下述一笔画定理。

[2] 一笔画定理(欧拉定理)

图 G 能够一笔画出的充要条件是，G 是连通的，且所有顶点的次数是偶数，或者仅有两个顶点的次数是奇数(证明参见例题与习题)。

一笔画问题，跟 G 为闭边列(欧拉回路)或开边列(欧拉路径)的问题是等同的。按上述定理，在全部顶点都是偶数次数的连通图中，无论从哪一个顶点出发，一笔画到最后都仍返回到该顶点。在开边列的情况下，从有奇数次数的两个顶点之一出发，最后将終止于另一个顶点。

[3] 欧拉图

闭边列(欧拉回路)是连通图，其所有顶点的次数是偶数。闭边列也叫做欧拉图。不过，在这里我们要对欧拉图给以广义的解释。即，所谓**欧拉图**，定义为所有顶点的次数是偶数的图（不管图是连通的还是非连通的)。因此，不论回路还是闭边列都是欧拉图，但除这两种以外还包括互质的几个回路的并集。若把一条橡皮圈作为一个回路，那末几个回路的并集，就像"在纸上适当撒开着的橡皮圈的集合"一样(如图 4.10)。现在，若把这种图的任一

顶点取作 v，v 的次数就为通过这个顶点的互质回路数的两倍。这对所有顶点来说都是如此，所以互质的几个回路的并集是欧拉图。例如，在图 4.10 中，通过顶点 2 的互质的回路是 C_1 和 C_3 两个回路，所以 $d(2)=2\times2=4$

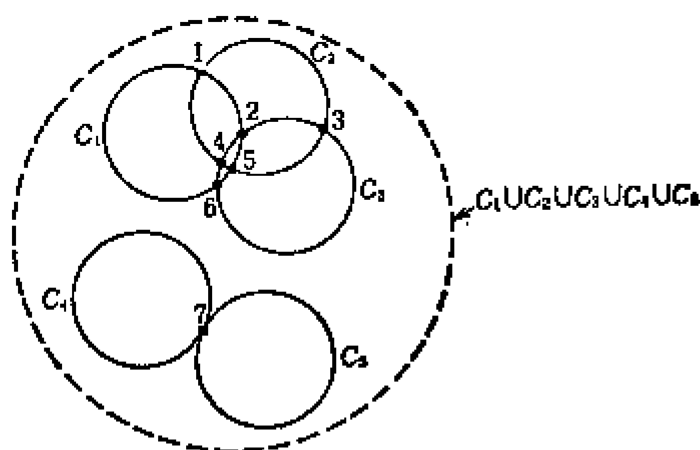


图 4.10 互质的几个回路的并集($C_1\cup C_2\cup C_3\cup C_4\cup C_5$)(在这个图中省略了次数是 2 的顶点)

[4] 欧拉图的环和

再说，当给定一个图时，作为其子图且成为欧拉图的欧拉子图，一般说有许多个。若将图 4.11 的图 G 中所包含的欧拉子图全部列举出来，则可得如图 4.12 所示的七种：$E_1=\{a,\ b\}$，$E_2=\{c, d,\ f\}$，…，$E_7=\{a,\ b,\ c,\ d,\ f\}$。如果作出欧拉子图的环和(⊕)，那将得出怎样的图呢？例如，在图 4.12 中，$E_1\oplus$

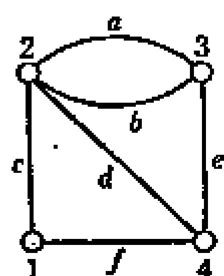


图 4.11 图 G

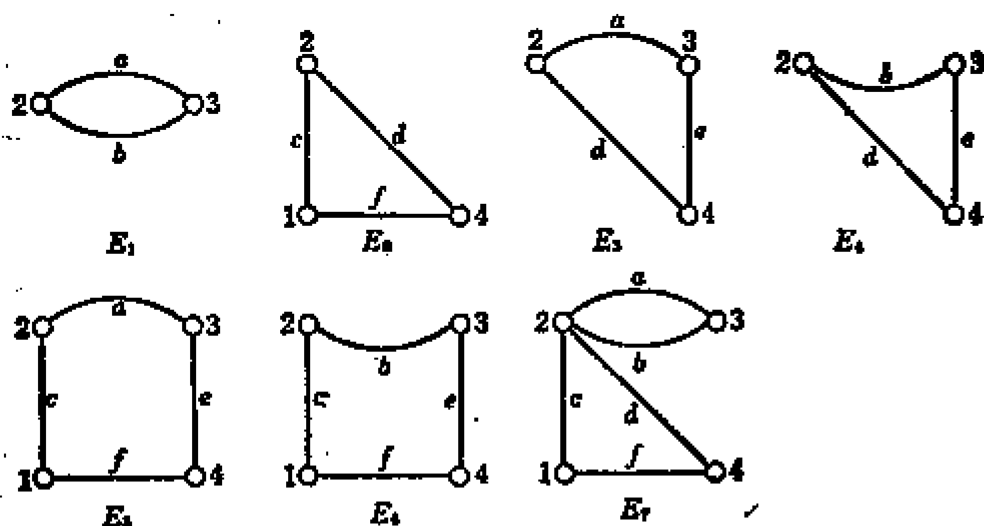


图 4.12 图 4.11 中的图的欧拉子图{E}

$E_3=\{a,\ b\}\oplus\{c, d,\ f\}=\{a,\ b,\ c,\ d,\ f\}=E_7$，$E_2\oplus E_3=\{c,\ d,\ f\}\oplus\{a,\ d,\ e\}=\{a,\ c,\ e,\ f\}=E_5$，依然成为欧拉图。

现在，设 E_i、E_j 为某个图 G 的两个不同的欧拉子图，让我们来考察一下 $E_i\oplus E_j$ 的顶点 p 的次数。设 E_i 和 E_j 上的顶点 p 的次数分别为 r、s，又设 E_i 上联接于顶点 p 的 r 条边与 E_j 上联接于同一顶点 p 的 s 条边中共同的边数为 t，那末，新的图则由非共同边所组成。顶点 p 的次数为 $(r-t)+(s-t)=r+s-2t$。由于 r、s 都是偶数，所以 $r+s-2t$ 也是偶数。以上的讨论，一般来说，无论对于哪个顶点都成立，所以 $E_i\oplus E_j$ 是欧拉图。相同的欧拉图彼此环和，显然是空集（例如 $E_i\oplus E_i=\varnothing$）。这样，两个不同的欧拉子图的环和，仍是欧拉图。这种$\oplus$的运算与下一节回路矩阵中两个行向量的以 2 为模的加法运算相对应。如按习惯，设空集也是欧拉图，则一般地说，两个以上的几个欧拉图的环和仍是欧拉图（例如图 4.12 中 $E_1\oplus E_2\oplus E_3=E_6$）。这样，可得出一个重要结论：含有空图的欧拉图的全集，对环和的运算是封闭的。也容易证明，这个集合$\{\varnothing, E\}$对环和的运算就形成“群”。生成这个欧拉子图的全集$\{\varnothing, E\}$的最小集合就是独立回路的集合，例如基本回路集合。

［例题］1　试证明一笔画定理的必要条件。

［证明］　假定图 G 能够一笔画出，则由于通过 G 的边仅仅一次，并且存在着对全部边普遍通过的边的序列，所以 G 为闭边列；或者也可以为开边列，显然 G 是连通的。对于闭边列，所有顶点的次数是偶数；而对于开边列，仅始点和终点的次数是奇数，其他顶点的次数都是偶数。

关于充分条件的证明作为本章的习题。

［例题］2　试证明含有空集的欧拉子图的全集$\{E, \varnothing\}$对环和的运算成为交换群。

[证明] (1) 对于任意的 E_i、$E_j \in \{E, \varnothing\}$

$$E_i \oplus E_j = E_j \oplus E_i \in \{E, \varnothing\}$$

(2) 在$\{E, \varnothing\}$中存在单位元 $\varnothing$，对于任意的 $E_i \in \{E, \varnothing\}$

$$E_i \oplus \varnothing = E_i$$

(3) 对于任意的$E_i \in \{E, \varnothing\}$存在逆元

$$E_i \oplus E_i = \varnothing$$

(4) 对于任意的 E_i、E_j、$E_k \in \{E, \varnothing\}$，下列的结合律成立。

$$E_i \oplus (E_j \oplus E_k) = (E_i \oplus E_j) \oplus E_k$$

[例题] 3　试确定对于图 4.12 中的$\{E_1, E_2, E_4\}$，按$\oplus$运算所生成的全部欧拉子图。

[略解] $E_3 = E_1 \oplus E_4$，$E_5 = E_1 \oplus E_2 \oplus E_4$，$E_6 = E_2 \oplus E_4$，$E_7 = E_1 \oplus E_2$。

[例题] 4　所谓哈密顿回路[*1]，就是包含图的所有顶点的回路。试在图 4.1(a)中列举 2～3 个哈密顿回路。再者，图 4.5 的图中有几个哈密顿回路？

[略解] [a, b, d, f]，[b, c, f, e]，[a, c, d, e]等。

4.4 回路矩阵与割集矩阵的关系

在图的矩阵表示方面，至此我们已经学习了关联矩阵和割集矩阵。回路矩阵则是表示图的各个边属于哪个回路(确切地说，属于哪个欧拉子图)的矩阵。在这一节中将说明回路矩阵的性质、特别是回路矩阵的秩等于该图的零度 $n(G)$ 的问题，以及回路矩阵与

---

*1　哈密顿回路[Hamilton loop(Circuit, line)]，是以 Sir William Hamilton 的名字命名的。它的由来是：对世界上主要都市只访问一次，并且见到全部都市，在这样的旅行路程中所形成的回路。与欧拉回路对比，它虽然清楚，但是没有规定哈密顿回路的简单定理。这种哈密顿回路的应用，有图的树的计算方法 [参阅参考文献 2)]。

割集矩阵的正交性等。

[1] 回路矩阵

首先，所谓无向图G的回路矩阵 $\boldsymbol{B}_e$，就是 $\boldsymbol{B}_e$ 的行对应于欧拉子图、列对应于边，而其元素 b_{ij} 取决于下列值的矩阵。

$$b_{ij}=\begin{cases}1 & \text{边 } e_j \text{ 属于欧拉子图 } E_i \text{ 时}\\ 0 & \text{边 } e_j \text{ 属于其他欧拉子图时}\end{cases} \tag{4.1}$$

再者，回路矩阵的行数仅为欧拉子图的个数，而列数仅为图的边数。今后，在欧拉子图中特别强调回路时，就用"C_i"代替"E_i"来表示。

图 4.11 所示的图G的回路矩阵，回路按图 4.13 那样考虑，就成为下式：

$$\boldsymbol{B}_e=\begin{array}{r} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ E_7=C_1\oplus C_2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{4.2}$$

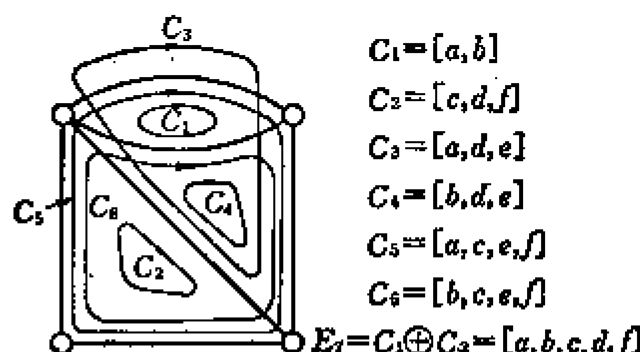


图 4.13 图 4.11 中图的回路以及互质回路的并集

由于集合的环和(⊕)跟以2为模的加法相对应，所以在回路矩

阵上，若把几个行相加（以 2 为模），就应该成为其他的行。事实上，在式(4.2)中，例如，第 1 行＋第 2 行$=\bar{C}_1+\bar{C}_2=[1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]+[0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1]=[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1]=$第 7 行$=\bar{E}_7$，$\bar{C}_1+\bar{C}_2+\bar{C}_3=\bar{C}_4$ 等。

[2] 基本回路矩阵

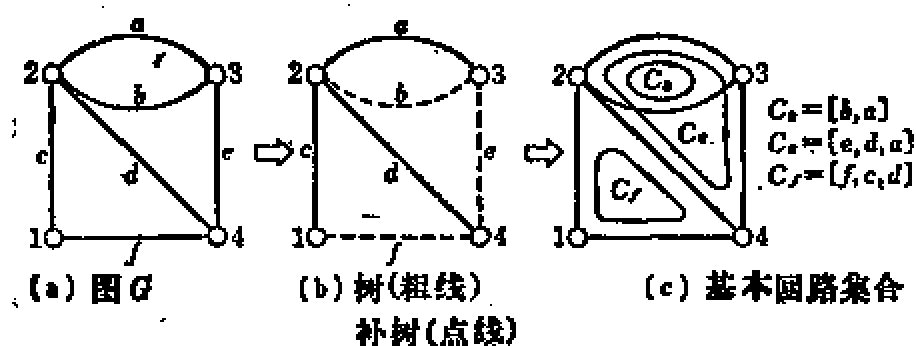
在顶点及边的数目分别是 n、b 的连通图中，有$(b-n+1)$个基本回路，这在 4.2 节中已经说过。把行限定为这些基本回路，则$(b-n+1)$行、b 列的回路矩阵就叫做**基本回路矩阵**(fundamental loop matrix)，用 $\boldsymbol{B}_f$ 表示。

然而，补树的各个连支是由一个个基本回路决定的，所以若将 $\boldsymbol{B}_f$ 的最前面的子矩阵（实际上是最前面的 $b-n+1$ 列）对应于补树的弦，则可写成式(4.3)那样的基本回路矩阵。

$$\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U}\quad \boldsymbol{B}_{f12}] \tag{4.3}$$

式中，$\boldsymbol{U}$ 是$(b-n+1)$阶的单位矩阵。

图 4.14 表示对给定的图，求基本回路矩阵的过程的一例。在



$$\Rightarrow \boldsymbol{B}_f=\begin{array}{c} \\ C_b \\ C_e \\ C_f \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} b & e & f & a & c & d \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

图 4.14 建立基本回路矩阵的过程

这个例子中，最初将图的树选为 $T=\{a, c, d\}$，则补树为 $T^c=\{b, e, f\}$，从而得出分别对应于补树的连支的基本回路 C_b, C_e, C_f。因此，基本回路矩阵如下式：

$$
\boldsymbol{B}_f=\begin{matrix} C_b \\ C_e \\ C_f \end{matrix}\overset{\begin{matrix} b & e & f & a & c & d \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \tag{4.4}
$$

式中对应于式(4.3)的 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{B}_{f_{12}}$ 明显地为式(4.5)。

$$
\boldsymbol{U}=\overset{\begin{matrix} b & e & f \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \qquad \boldsymbol{B}_f=\overset{\begin{matrix} a & c & d \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}} \tag{4.5}
$$

这样，由补树的连支所得出的基本回路矩阵中，单位矩阵的列表示补树的连支，而 $\boldsymbol{B}_{f_{12}}$ 的列表示树的树支。然而把基本回路矩阵的行与列的排列适当调换后，虽然形成 $\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{B}_{f_{12}}]$ 的形式，$\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{B}_{f_{12}}$ 的列是否仍分别对应于补树和树呢？下面的内容，利用基本回路矩阵与关联矩阵的转置矩阵之间的正交性能够证明它是肯定的。

[3] 回路矩阵与关联矩阵的正交性

首先，计算一下基底关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}_f$ 的转置的乘积。先把 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}_f$ 的列的顺序，按照列所对应的边在两个矩阵中为相同的顺序重新排列。这样就把 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}_f$ 分别用行向量表示为

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_{n-1} \end{bmatrix} \tag{4.6}
$$

$$\boldsymbol{B}_f=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \boldsymbol{B}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{B}_{b-n+1}\end{bmatrix} \tag{4.7}$$

这里,设 $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$,…,$\boldsymbol{A}_{n-1}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的第一,第二,…,第 $n-1$ 行;同样,$\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{B}_2$, …, $\boldsymbol{B}_{b-n+1}$ 分别表示 $\boldsymbol{B}_f$ 的第一,第二,…,第 $b-n+1$ 行。故

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_f^t=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\\ \boldsymbol{A}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{A}_{n-1}\end{bmatrix}[\boldsymbol{B}_1^t\ \boldsymbol{B}_2^t\ \cdots\ \boldsymbol{B}_{b-n+1}^t]$$

$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1^t & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_2^t & \cdots & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{b-n+1}\\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_1^t & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_2^t & \cdots & \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}_{b-n+1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{B}_1^t & \boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_{n-1}\boldsymbol{B}_{b-n+1}\end{bmatrix} \tag{4.8}$$

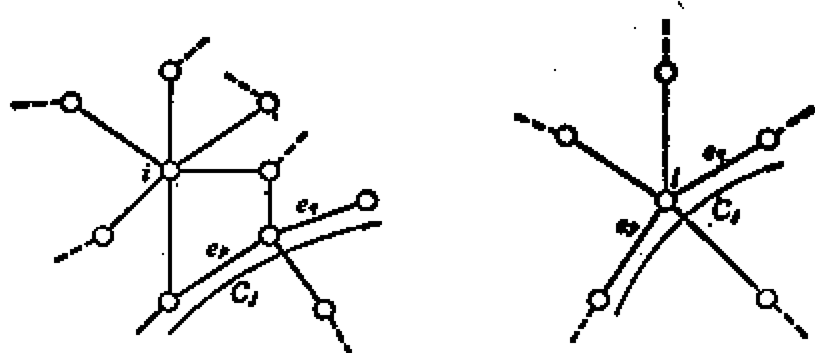
$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_f^t$ 的(i, j)元素为

$$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j^t=[a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{ib}]\cdot[b_{j1}\ b_{j2}\ \cdots\ b_{jb}]^t$$

$$=\sum_{k=1}^{b}a_{ik}b_{kj}^t=\sum_{k=1}^{b}a_{ik}b_{jk} \tag{4.9}$$

若回顾一下 a_{ik}和 b_{jk} 的下标,可知 i 意味着顶点 i,k 意味着边 e_k,j 意味着基本回路 C_j;所以,假如 C_j 不通过顶点 i,则对于所有的 k $(1\leqslant k\leqslant b)$,有 $a_{ik}=0$ 或 $b_{jk}=0$。故这种情况下 $\sum_{k=1}^{b}a_{ik}b_{jk}=0$ [参见图 4.15(a)]。

其次,在基本回路 C_j 通过顶点 i 的情况下,如图 4.15(b)那样,在顶点 i 的关联集合中存在边 e_p、e_q,于是$a_{ip}=a_{iq}=1$,且$b_{jp}=b_{jq}=1$。对于图的其他的边,是 $a_{ik}=0$ 或 $b_{jk}=0$ $(k\neq p, q)$。故 $\sum_{k=1}^{b}a_{ik}b_{jk}=a_{ip}b_{jp}+a_{iq}b_{jq}=1+1=0$(以 2 为模)。以上讨论对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_f^t$ 的任何元素都成立,所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}_f^t$ 正交。即



(a) 基本回路 C_j 不通过顶点 i 时　　(b) 基本回路 C_j 通过顶点 i 时

图 4.15　在图中顶点 i 和基本回路 C_j 的位置

$$\boldsymbol{AB}_f^t = \boldsymbol{0} \quad (\text{以 2 为模}) \tag{4.10}$$ *1

若将式(4.10)转置，则为

$$(\boldsymbol{AB}_f^t)^t = \boldsymbol{B}_f \boldsymbol{A}^t = \boldsymbol{0} \tag{4.11}$$

下面用例子来说明。对图 4.14(a) 中图的关联矩阵，若以顶点 4 作为参考点，则为

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} b & e & f & a & c & d \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.12}$$

若在本例中取图 4.14 的基本回路矩阵，则得

$$\boldsymbol{AB}_f^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{以 2 为模}) \tag{4.13}$$

这种正交性，不仅是关联矩阵与基本回路矩阵的关系，对关联矩阵与一般回路矩阵 $\boldsymbol{B}_e$ 也成立。这种情况下，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}_e$ 的列的次序相同，$\boldsymbol{AB}_e^t$ 的(i, j)元素为零，或者在互质的回路的并集通过顶点 i 若干次的情况下，(i, j)元素取 2，4，…偶数值。结果

---

*1　右边的"0"表示全部元素为零的$(n-1)\times(b-n+1)$阶矩阵。再者，若用 $\boldsymbol{A}_a$ 代替 $\boldsymbol{A}$，式(4.10)当然也成立。

$$AB_c^t = 0 \quad (\text{以 2 为模}) \tag{4.14}$$

式(4.14)还可推广。就是说，由于关联矩阵是割集矩阵的特殊形式，所以，实际上把割集矩阵与回路矩阵的转置矩阵的积说成正交是更为一般化的。关于这一点后面再解释。

[4] 由回路矩阵与关联矩阵的正交性所得出的结果

我们已经明白，假如在连通图的基本回路矩阵B_f中，把前面的$(b-n+1)$列作为补树的连支，把其余的$(n-1)$列对应于树，则可写成式(4.3)那样 $B_f=[U \quad B_{f12}]$。这里如将 B_f 的列适当调换，形成上式那样，则可以证明，对应于单位子矩阵 U 的列的边集合形成补树，对应于 B_{f12} 的列的边集合是树。现在，把基底关联矩阵 A 的列按照 B_f 的列(对应于 U、B_{f12} 的列)那样进行调换，设为 $A=[A_{11} \quad A_{12}]$，这里，A_{11} 为对应于 U 的$(n-1)\times(b-n+1)$子矩阵，A_{12} 为对应于 B_{f12} 的$(n-1)$阶子矩阵。从 $AB_f^t=0$ 得

$$A_{11}+A_{12}B_{f12}^t=0, \quad \text{即} \quad A_{11}=A_{12}B_{f12}^t \quad (\text{以 2 为模}) \tag{4.15}$$

故

$$A=[A_{12}B_{f12}^t \quad A_{12}]=A_{12}[B_{f12}^t \quad U] \tag{4.16}$$

然而，由于基底关联矩阵 A 的秩为 $n-1$，所以在式(4.16)中，A_{12} 的行列式不为零，即 $|A_{12}|\neq 0$，A_{12} 成为其行列式不为零的最大阶数的子矩阵，所以 A_{12} 的列对应于树(参阅 3.3 节)，因而 A_{11} 的列表示补树，B_f 中 U 的列也对应于补树。例如，若将式(4.4)的列调换，成为式(4.17)

$$B_f=\begin{array}{c} \begin{matrix} b & e & c & f & a & d \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}=[U \quad B_{f12}] \tag{4.17}$$

则$\{b, e, c\}$是补树，$\{f, a, d\}$是树。

利用 $AB_f^t=0$ 的关系式，便能根据基底关联矩阵算出基本回路矩阵(像下面那样)。首先，将 A 与 B_f 的列分成对应于补树和树的形式：

$$A=[\overbrace{A_{11}}^{\text{补树}}\quad \overbrace{A_{12}}^{\text{树}}]\qquad B_f=[\overbrace{U}^{\text{补树}}\quad \overbrace{B_{f12}}^{\text{树}}]$$

根据式(4.15)，$|A_{12}|\neq 0$，故 A_{12} 的逆矩阵 A_{12}^{-1} 存在，所以

$$B_{f12}^t=A_{12}^{-1}A_{11}$$

即

$$B_{f12}=A_{11}^t(A_{12}^{-1})^t \tag{4.18}$$

因此

$$B_f=[\overbrace{U}^{A_{11}\text{的列对应的边}}\quad \overbrace{A_{11}^t(A_{12}^{-1})^t}^{A_{12}\text{的列对应的边}}] \tag{4.19}$$

从基底关联矩阵算出基本回路矩阵的公式

这里，必须注意，B_f 和 A 的列所对应的边应一一对应(即顺序一致)。

[5] 回路矩阵的秩

如前所述，回路矩阵 B_e 的各行代表图的欧拉子图，行向量的以 2 为模的和，对应于欧拉子图的环和。在连通图 G 的回路矩阵 B_e 中，包含着基本回路矩阵 B_f。B_f 由式(4.3)表示，所以 $r(B_f)=b-n+1$。而 B_e 包含着子矩阵 B_f，因此

$$r(B_e)\geqslant b-n+1 \tag{4.20}$$

另一方面，根据西尔威斯特(Sylvester)定理*1，有

$$r(AB_e^t)\geqslant r(A)+r(B_e^t)-b \tag{4.21}$$

---

*1 两个矩阵 $C_{u\times v}$、$D_{v\times w}$ 的积的零度不大于各个矩阵的零度之和，即 $n(CD)\leqslant n(C)+n(D)$，从而有 $r(CD)\geqslant r(C)+r(D)-v$。

由 $AB_e^t=0$，得 $r(AB_e^t)=0$，而 $r(A)=n-1$，所以

$$r(B_e^t)\leqslant b-n+1 \tag{4.22}$$

由式(4.20)和式(4.22)可得

$$r(B_e^t)=r(B_e)=b-n+1 \tag{4.23}$$

根据式(4.23)，在连通图的回路矩阵 B_e 上，独立行的最大数是$(b-n+1)$，其余的行都从属于这些行。即，在拓扑学上，这意味着在欧拉子图的集合中独立的回路(一般地说，欧拉子图)有$(b-n+1)$个，由对应于这些$(b-n+1)$行的独立行向量的回路(欧拉子图)的集合，经过环和运算，可得出所有的回路(欧拉子图)。作为一简单的方法，B_e 的任意行可用 B_f 的行的线性组合来表示，所以，所有的欧拉子图可由基本回路集合的环和得出。

当图由 ρ 个连通成分组成时，该图的回路矩阵的秩便为 $b-n+\rho$。

由上述理由，在图 G 的回路矩阵中，秩为 $b-n+\rho$、由 $b-n+\rho$ 行组成的子矩阵(用 B 表示)就叫做**基底(既约)回路矩阵**[*1](basis loop matrix, basis circuit matrix)。不言而喻，对应于基底回路矩阵 B 的所有行的回路(或互质的回路的并集)，在图上就成为独立回路(或互质的回路的并集)。

[6] 从基底回路矩阵计算全部补树的方法

像已经说明过的那样，在连通图 G 的基本回路矩阵 B_f 上，$(b-n+1)$ 阶的最大阶数的子矩阵的列所代表的边的集合成为补树的充要条件，是该矩阵为$(b-n+1)$阶的单位矩阵。这个单位矩阵的行列式是 1，而不是 0 (即正则的)。这一点，对于 B_f 及相同秩数的一般的基底回路矩阵 B 都是一样的。也就是说，在连通图

*1 通常所说的回路矩阵，就是这个基底回路矩阵。

G 的基底回路矩阵 $\boldsymbol{B}$ 上，对应于其最大阶数子矩阵的列的边为 G 的补树的充要条件，是其行列式为正则的（其证明只要利用公式 $\boldsymbol{AB}^t=0$ 即可，参阅习题[9]）。因此，对于这个问题来说，没有其他更有效的方法。但是，假如考虑基底回路矩阵 $\boldsymbol{B}$（或基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}_f$）的正则的最大阶数子矩阵（或单位矩阵），便能列举出全部可能的补树。

[7] 回路矩阵与割集矩阵的关系

前面已经说过，由于割集或互质的几个割集的并集可以适当地用关联集合的环和来表示，所以基底割集矩阵的任意行可以用基底关联矩阵的行的线性组合来书写，从而得出式(3.17)。现在，若用元素 1 或 0 组成的$(n-1)$阶正则矩阵 $\boldsymbol{D}$（一般地说，$n-\rho$ 阶的正则矩阵）乘以式(4.10)，则有

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{AB}_f^t)=(\boldsymbol{DA})\boldsymbol{B}_f^t=0 \tag{4.24}$$

然而，由式(3.17)，$\boldsymbol{DA}$ 是（基底）割集矩阵 $\boldsymbol{Q}$，所以

$$\boldsymbol{QB}_f^t=0 \tag{4.25}$$

因此，当然

$$\boldsymbol{Q}_e\boldsymbol{B}_f^t=0 \tag{4.26}$$

故，图的基底割集矩阵和基本回路矩阵的转置（或 $\boldsymbol{B}_f$ 与 $\boldsymbol{Q}$ 的转置）正交。

完全相同，由式(4.14)，$\boldsymbol{AB}_e^t=0$，$\boldsymbol{AB}^t=0$，所以

$$\boldsymbol{QB}_e^t=0 \qquad \boldsymbol{QB}^t=0 \tag{4.27}$$

归纳以上的讨论，基底关联矩阵是基底割集矩阵，同样，基本回路矩阵也是基底回路矩阵，所以，一般地说，割集矩阵与回路矩阵的转置（或回路矩阵与割集矩阵的转置）正交。

利用这种正交性，能够证明割集矩阵与关联矩阵有同样的性质，并且从基底割集矩阵能够导出基本割集矩阵这种特殊的基底

割集矩阵。下面让我们来说明这一点。

对图 G，将基底割集矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的列按照与基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U}\quad \boldsymbol{B}_{f12}]$的列相同的次序重新排列为

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{Q}_{11}\quad \boldsymbol{Q}_{12}] \tag{4.28}$$

不待说，$\boldsymbol{Q}_{11}$ 的列对应于 $\boldsymbol{U}$ 的列，$\boldsymbol{Q}_{12}$ 的列对应于 $\boldsymbol{B}_{f12}$ 的列(即，$\boldsymbol{Q}_{11}$ 的列为建立基本回路集合时所选的树的补树，而 $\boldsymbol{Q}_{12}$ 的列代表该树的树支。由 $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}_f^t=0$ 可得式(4.29)。

$$\boldsymbol{Q}_{11}=\boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{B}_{f12}^t \tag{4.29}$$

因此

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_{12}[\boldsymbol{B}_{f12}^t\quad \boldsymbol{U}] \tag{4.30}$$

假如G是连通图，则 $\boldsymbol{Q}$ 有 $n-1$ 行，$r(\boldsymbol{Q})=n-1$(在一般的图的情况下，$\boldsymbol{Q}$ 是$n-\rho$ 行，$r(\boldsymbol{Q})=n-\rho$)，式(4.30)中的 $\boldsymbol{Q}_{12}$ 必须是$|\boldsymbol{Q}_{12}|\neq 0$。从而搞清楚了：列对应于树的 $\boldsymbol{Q}$，其最大阶数的子矩阵 $\boldsymbol{Q}_{12}$ 的行列式是正则的。

其次，可以证明，假如 $\boldsymbol{Q}$ 的最大阶数子矩阵，例如 $\boldsymbol{Q}_{12}$ 为正则的(即$|\boldsymbol{Q}_{12}|\neq 0$)，则 $\boldsymbol{Q}_{12}$ 的列所代表的边对应于树。把基底割集矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 的列象式(4.31)那样重新排列，使$|\boldsymbol{Q}_{12}|\neq 0$，

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{Q}_{11}\quad \boldsymbol{Q}_{12}] \tag{4.31}$$

将上式两边左乘 $\boldsymbol{Q}_{12}$ 的(以 2 为模)逆矩阵 $\boldsymbol{Q}_{12}^{-1}$，

$$\boldsymbol{Q}_{12}^{-1}\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{Q}_{12}^{-1}\boldsymbol{Q}_{11}\quad \boldsymbol{U}] \tag{4.32}$$

$\boldsymbol{Q}_{12}^{-1}$ 也是由元素 1、0 组成的$(n-1)$阶正则矩阵，所以 $\boldsymbol{Q}_{12}^{-1}\boldsymbol{Q}$ 是同一个图的另外的基底割集矩阵。若将这个新的矩阵用$\boldsymbol{Q}_f$ 来置换，将 $\boldsymbol{Q}_{12}^{-1}\boldsymbol{Q}_{11}$ 用 $\boldsymbol{Q}_{f11}$ 来置换，则式(4.32)变为

$$\boldsymbol{Q}_f=[\boldsymbol{Q}_{f11}\quad \boldsymbol{U}] \tag{4.33}$$

另一方面，使同一个图的适当的基底回路矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列与 $\boldsymbol{Q}$ 的列的顺序一致，分为下式的形式：

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_{11}\quad \boldsymbol{B}_{12}] \tag{4.34}$$

若利用式(4.33)和式(4.34)，计算 $BQ_f^t=0$，则得式(4.35)

$$B=B_{11}[U \quad Q_{f11}^t] \tag{4.35}$$

然而，由于矩阵 B 的阶数是 $b-n+1$，等于 B 的行数，所以应该有 $|B_{11}|\neq 0$。就这点来说，B_{11} 与 Q_{11} 的列都代表补树，因此，Q_{12} 的列代表树。倘若所考虑的图 G 不是连通图，那末 Q_{12} 的列就代表 G 的林。

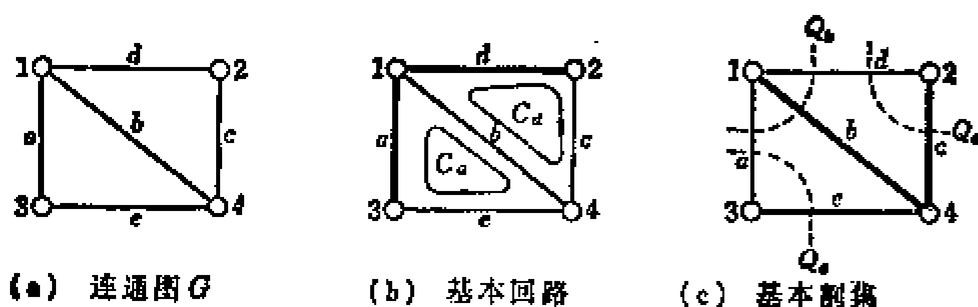
[8] 基本回路矩阵与基本割集矩阵的互换性

前面的证明过程表明，从图的基底割集矩阵 Q 可得到像式(4.33)那样含有单位矩阵的另外的基底割集矩阵，这样的矩阵就叫做**基本割集矩阵**(fundamental cut-set matrix)，以 Q_f 表示。在从式(4.31)到得出式(4.33)的过程中，Q_f 是基底割集矩阵，因而 Q_f 的各行或是割集，或是互质的割集的并集。但是，为了使 Q_f 含有单位矩阵，Q_f 的各行所代表的边的集合，不应包含其他行所代表的边的集合，或者对应于其他行之和的边的集合，所以，Q_f 的行所代表的边的集合不能成为互质的割集的并集。即 Q_f 的行只表示割集。

这样，Q_f 中的单位矩阵 U 的列与 Q_{12} 的列代表同一的边，都对应于树，所以 Q_f 的行 i 所表示的割集就叫做关于树支 e_i 的基本割集。例如，若选图 4.16(a)中的图的基底割集矩阵如下式所示①：

$$Q=\begin{matrix} & \begin{matrix} a & b & c & d & e \end{matrix} \\ \begin{matrix} Q(1) \\ Q(2) \\ Q(3) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{4.36}$$

① 原文以下计算与图 4.16 中的树不符，这里是重新计算的。——译者



(a) 连通图 G　(b) 基本回路　(c) 基本割集

$$B_f=[U B_{f12}] = \begin{array}{c} \\ C_a \\ C_d \end{array}\begin{array}{cc:ccc} a & d & b & c & e \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$Q_f=[Q_{f11} U] = \begin{array}{c} \\ Q_b \\ Q_c \\ Q_e \end{array}\begin{array}{cc:ccc} a & d & b & c & e \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

互为转置

图 4.16

若将 d 列调到 b、c 列的前面，这个矩阵便成为下面的 $Q_f=[Q_{f11}\quad U]$ 的形式：

$$Q=Q_f=\begin{array}{c} \\ Q_b \\ Q_c \\ Q_e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a & d & b & c & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.37}$$

因此，这个基本割集矩阵就成为与树 $T=\{b, c, e\}$ 相关的矩阵，第一行是关于树支 b 的基本割集 $Q_b=\{a, b, d\}$，等于顶点 1 的关联集合，$Q_b=Q(1)$；第二行是关于树支 c 的基本割集 $Q_c=\{c, d\}$，$Q_c=Q(2)$；第三行是关于树支 e 的基本割集 $Q_e=\{a, e\}$，$Q_e=Q(3)$。

适当选择连通图 G 的树 T，则可得出关于 T 的基本割集矩阵。

$$Q_f=[\overbrace{Q_{f11}}^{\text{补树}}\quad\overbrace{U}^{\text{树}}] \tag{4.38}$$

另一方面，可得出相应于补树 T^a 的基本回路矩阵。若跟 Q_f 一样配置基本回路矩阵的列，则为

$$\boldsymbol{B}_f = [\overbrace{\boldsymbol{U}}^{\text{补树}} \quad \overbrace{\boldsymbol{B}_{f12}}^{\text{树}}] \tag{4.39}$$

从 $\boldsymbol{Q}_f\boldsymbol{B}_f^t = 0$，可得关系式

$$\boldsymbol{Q}_{f11} = \boldsymbol{B}_{f12}^t \tag{4.40}$$

把式(4.40)代入式(4.38)或式(4.39)，便可从 $\boldsymbol{B}_f$ 求出 $\boldsymbol{Q}_f$，反之，也可以 $\boldsymbol{Q}_f$ 求得 $\boldsymbol{B}_f$，如下所示：

$$\boldsymbol{Q}_f = [\boldsymbol{B}_{f12}^t \quad \boldsymbol{U}] \tag{4.41}$$

$$\boldsymbol{B}_f = [\boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{Q}_{f11}^t] \tag{4.42}$$

图 4.16 表示一个例子，单位子矩阵照原样不动，仅仅利用 $\boldsymbol{Q}_{f11}$ 与 $\boldsymbol{B}_{f12}$ 相互转置的关系就可以了。

[9] 基本割集的拓扑算法

到此为止，我们学过了基本切割(或基本割集矩阵)的存在及由基本回路求基本割集的代数方法。于是需要考虑一下，基本割集有什么样的拓扑意义？怎样才能用拓扑方法把它算出来？在这方面，$\boldsymbol{Q}_{f11}^t = \boldsymbol{B}_{f12}$ [式(4.40)]将起着重要的作用。

现在设连通图 G 有 n 个顶点和 b 条边 $e_1, e_2, \cdots, e_b$。更进一步，为不失一般性，设补树 $T^0 = \{e_1, e_2, \cdots, e_{b-n+1}\}$，树 $T = \{e_{b-n+2}, e_{b-n+3}, \cdots, e_b\}$，则由 T^0 得出基本回路 $c_1, c_2, \cdots, c_{b-n+1}$，由 T 得出基本割集 $Q_{b-n+2}, Q_{b-n+3}, \cdots, Q_b$。式(4.41)和式(4.42)可详细表示为

$$\boldsymbol{Q}_f = \begin{matrix} Q_{b-n+2} \\ \vdots \\ Q_j \\ \vdots \\ Q_b \end{matrix} \left[\begin{array}{c|cccc} \overbrace{e_1 \cdots e_i \cdots e_{b-n+1}}^{\text{补树}} & \multicolumn{4}{c}{\overbrace{e_{b-n+2} \cdots e_j \cdots e_b}^{\text{树}}} \\ & 1 & & & 0 \\ \boldsymbol{Q}_{f11} (= \boldsymbol{B}_{f12}^t) & & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \end{array} \right] \tag{4.41'}$$

$$
\begin{array}{c} \\ C_1 \\ \vdots \\ B_f = C_i \\ \vdots \\ C_{b-n+1} \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} e_1 & \cdots & e_i & \cdots & e_{b-n+1} & e_{b-n+2} & \cdots & e_j & \cdots\ e_b \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc:c}
1 & & & & 0 & \\
& \ddots & & & & \\
\cdots & \cdots & 1 & & & B_{f12} \\
& 0 & & \ddots & & \\
& & & & 1 &
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (4.42)'
$$

这就是说，在式(4.42)中，B_{f12} 的(i, j)元素是1，(i, i)元素也是1，这就意味着连支 e_i 和树支 e_j 都包含于回路 C_i 中。另一方面，根据 $Q_{f11}=B_{f12}^t$ 的关系，假如 B_{f12} 的(i, j)元素是1，那末在 Q_f 上，Q_{f11} 的(j, i)元素也是1。同时，对于 Q_f 来说，由于(j, j)①元素也是1，所以连支 e_i 和树支 e_j 包含于基本割集 Q_j 中。完全相同，如果 Q_{f11} 的(j, i)元素是1，则 B_{f12} 的(i, j)元素也是1。所以

树支 e_j 包含于由连支 e_i 产生的基本回路 C_i 中	$\Longleftrightarrow$	连支 e_i 包含于由树支 e_j 产生的基本割集 Q_j 中

因此，把选出的树支 e_j 固定，把连支 e_i 添加到树上，假如此时通过 e_j 的基本回路 C_i 存在，则边 $e_i\in Q_j$。如果对补树的所有的连支施行这个作法，便求出关于树支 e_j 的基本割集矩阵。简单地说，在图G中被切割的边的集合，若含有 e_j、并且还适当包括连支，则此集合就是关于树支 e_j 的基本割集。进而对其他的树支重复跟前面相同的作法，就得到关于树的全部基本割集(因此，得出基本割集矩阵)。

[例题]1　在图4.17的图G中，试求选择树 $T=\{c, g, f\}$时的基本回路矩阵 B_f，然后确定以顶点2为参考顶点的基底关联矩

① 原文为(i, j)，误。——译者

阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}_f^t$ 正交。

［略解］ 因补树 $T^c=\{a, b, d, e\}$，所以基本回路矩阵为

$$
\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U}\ \boldsymbol{B}_{f12}]=\begin{matrix} \\ C_a \\ C_b \\ C_d \\ C_e \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} a & b & d & e & & c & f & g \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{matrix}
$$

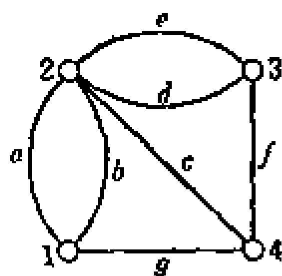


图 4.17

又，以顶点 2 为参考顶点，并将 $\boldsymbol{A}$ 的列与 $\boldsymbol{B}_f$ 的列作成同一顺序，则

$$
\boldsymbol{A}=\begin{matrix} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} a & b & d & e & c & f & g \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}
$$

$\boldsymbol{AB}_f^t=\boldsymbol{0}$（模 2）。省略。

［例题］2　在例题 1 中，试从基底关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 求基本回路矩阵。

［略解］ 只要将 $\boldsymbol{A}_{12}$ 选择成这样的子矩阵就行了，即对应于其列的边的集合为树。在前面例题 1 求得的 $\boldsymbol{A}$ 中，把由 c、f、g 组成的列作为 $\boldsymbol{A}_{12}$ 也可以，但是，在这里我们考察其他的树。若以 $T=\{d, f, g\}$作为树，将 $\boldsymbol{A}$ 重新排列，则

$$
\boldsymbol{A}=\begin{matrix} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} a & b & c & e & d & f & g \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{matrix}=[\boldsymbol{A}_{11}\quad \boldsymbol{A}_{12}]
$$

其中

$$
\boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

的逆矩阵为

$$A_{12}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}$$

若以 2 为模进行计算，则

$$A_{11}^{t}(A_{12}^{-1})^{t}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

故若考虑到使 B_f 的列与 A 的列次序相同，则得

$$B_f=[U\ \ A_{11}^{t}(A_{12}^{-1})^{t}]^{①}=\begin{matrix} & a & b & c & e & d & f & g\\ C_a & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ C_b & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ C_c & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ C_e & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\end{matrix}$$

这个 B_f 就是由补树 $T^c=\{a, b, c, e\}$产生的基本回路矩阵。

［例题］3　对于图 4.18 中的图 G，试求当取 $T=\{b, d, e\}$时的基本割集 Q_b、Q_d、Q_e。

［解答］　补树为 $T^c=\{a, c\}$，基本回路是 $C_a=[a, e, b]$ 和 $C_c=[c, d, b]$（见图 4.18(a)）。

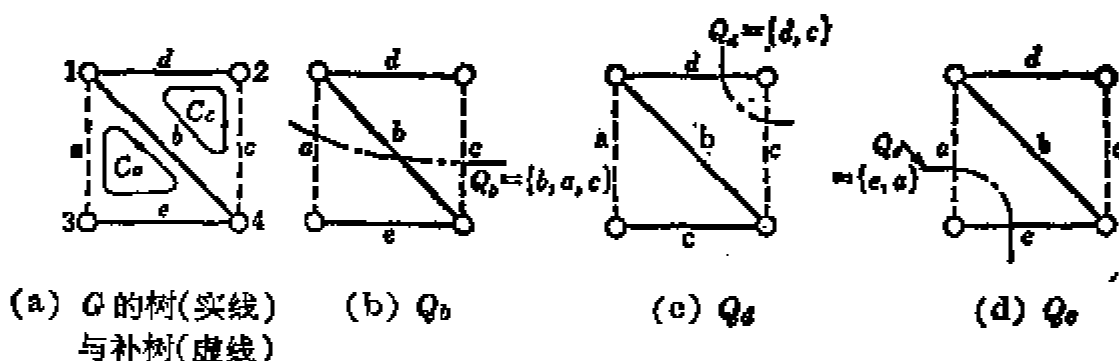
(i) Q_b(图(b))　C_a 与 C_c 通过树支 b。所以 $Q_b=\{b, a, c\}$。

(ii) Q_d(图(c))　C_a 不通过 d，仅 C_c 通过 d。所以 $Q_d=\{d, c\}$。

(iii) Q_e(图(d))　C_a 通过 e，但 C_c 不通过 e。所以 $Q_e=\{e, a\}$。

---

① 矩阵式中 A_{11}^{t} 原文误为 A_{12}^{t}。——译者



(a) G 的树(实线)与补树(虚线)　(b) Q_b　(c) Q_d　(d) Q_e

图 4.18

4.5 有向图的回路矩阵

在这一节中，我们继续学习有向图的回路。在有向图中，回路上具有方向，并且对回路矩阵的运算可按照普通的四则运算方法(在无向图中是以 2 作为模的运算)。除此以外，与对无向图的处理完全相同。

[1] 回路矩阵

所谓有向图的回路，指的是：(1)在把图视作无向图时的回路上，将属于此回路的边的方向还原；(2)将该回路的方向适当地约定为顺时针方向或反时针方向。回路的方向可根据具体情况(例如基本回路时)来指定。图 4.19 是用细实线表示有向图的回路及其方向的图。

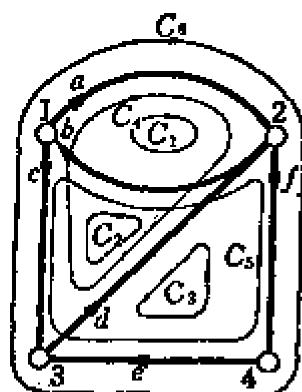


图 4.19　有向图 G 及其回路

C_1 回路沿着边 $a\to b$ 前进；C_5 回路是以 $b\to f\to e\to c$ 作为正的方向，边 b 和边 c 的方向与回路的方向相反。更一般地说，所谓有向图的互质回路的并集，就是除去在边上具有方向以外跟无向图的情况相同，而互质回路的并集的方向为构成它的每个回路所具有的方向。例如，在图 4.19 中，有 $C_1 \oplus C_5$ 的互质回路

的并集，并且 $C_1 \oplus C_3$ 的方向与 C_1 和 C_3 各个回路原来的方向相同。

所谓有向图 G 的回路矩阵 $\boldsymbol{B}_e$，就是行代表回路或者互质回路的并集，而列代表图 G 中的边的这样一种矩阵，$\boldsymbol{B}_e$ 的元素 b_{ij} 有下列的值：

$$
b_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{当边 } e_j \text{ 包含于回路（或互质回路的并集）} C_i \\ & \text{中，} e_j \text{ 与 } C_i \text{ 方向一致时（即同方向时）} \\ -1 & \text{当边 } e_j \text{ 包含于回路（或互质回路的并集）} C_i \\ & \text{中，} e_j \text{ 与 } C_i \text{ 方向不一致时（即反方向时）} \\ 0 & \text{当边 } e_j \text{ 不包含于回路（或互质回路的并集）} \\ & C_i \text{ 中时} \end{cases} \tag{4.43}
$$

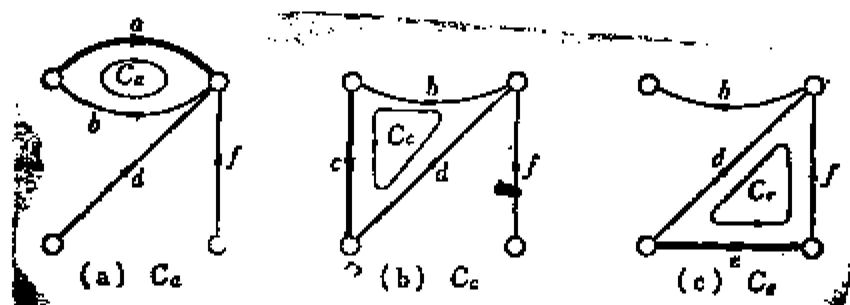
这样，有向图的回路矩阵，就表示边包含在哪个回路中，具有怎样的方向。对于图 4.19 中的图 G，若各回路的方向如图所示，则回路矩阵成为下式：

$$
\boldsymbol{B}_e = \begin{array}{c} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_1\oplus C_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{4.44}
$$

这里，$C_1=[a, b]$，$C_2=[b, c, d]$，$C_3=[d, e, f]$，$C_4=[a, c, d]$，$C_5=[b, c, e, f]$，$C_6=[a, c, e, f]$。在同图中，$C_4=C_1\oplus C_2$，$C_5=C_2\oplus C_3$，$C_6=C_1\oplus C_2\oplus C_3$。但若在式(4.44) 中把各行作为向量，则 $\vec{C}_4=-\vec{C}_1+\vec{C}_2=-[1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0]+[0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]=[-1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0]$，$\vec{C}_5=-\vec{C}_2-\vec{C}_3$，$\vec{C}_6=-\vec{C}_1+\vec{C}_2+\vec{C}_3$。

[2] 基本回路矩阵

在有向图中，也完全能够跟无向图一样来定义基本回路。但是，基本回路的方向应取成与包含于回路中的补树的连支的方向一致。以图 4.20 为例，表示有向图的基本回路的集合。选择 $\{b, d, f\}$ 为树，在图(a)中，由补树的连支产生的基本回路 $C_a=[a, b]$ 的方向与连支的方向一致，对于图(b)、(c)也是一样。



树(细线)　　补树(粗线)

基本回路的方向与补树的连支的方向一致

图 4.20　有向图(图 4.19)G 的基本回路集合

和无向图的情况完全一样，表示图的边怎样包含在这种基本回路集合的各个回路中的矩阵，就是基本回路矩阵(以 $\boldsymbol{B}_f$ 表示)。假定有向图 G 的顶点数、边数及连通片数分别为 n、b 及 ρ，那末 $\boldsymbol{B}_f$ 就是 $(n-b+\rho)$ 行、b 列的矩阵。在下式的 b 列中最前面的 $(n-b+\rho)$ 列是单位矩阵。

$$\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U} \quad \boldsymbol{B}_{f12}] \tag{4.45}$$

在 G 为连通图的情况下($\rho=1$)，为了使各个基本回路的方向取成补树的连支的方向，应使代表补树的最前面的 $(n-b+1)$ 列成为单位矩阵，很明显，$\boldsymbol{B}_{f12}$ 的列代表树。因此，由图 4.20 得出的对应于基本回路集合的基本回路矩阵可写成式(4.46)的形式。当然，元素 -1 意味着所属的边与回路的方向相反，1 意味着边与回路方向相同。

$$
\begin{array}{c} \\ \\ \boldsymbol{B}_f = \begin{array}{c} C_a \\ C_c \\ C_e \end{array} \end{array}
\begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ccc} \quad & \text{补树} & \quad \end{array}} \quad \overbrace{\begin{array}{ccc} \quad & \text{树} & \quad \end{array}} \\ \begin{array}{ccc|ccc} a & c & e & b & d & f \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \end{array}
\tag{4.46}
$$

[3] 回路矩阵与关联矩阵的正交性

将有向图G的关联矩阵 $\boldsymbol{A}_e$ 与回路矩阵 $\boldsymbol{B}_e$ 分别表示为行向量，即

$$
\boldsymbol{A}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_e = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 \\ \boldsymbol{B}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_m \end{bmatrix}
$$

这里，n 为G的顶点数，m为G的回路数或互质回路的并集数。$\boldsymbol{A}_e\boldsymbol{B}_e^t$ 的(i、j)成分为

$$
\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j^t = a_{i1}b_{j1} + a_{i2}b_{j2} + \cdots + a_{ib}b_{jb} \tag{4.47}
$$

下面让我们来计算这个值。

若注意到 $\boldsymbol{A}_i$ 表示顶点 i 的关联集合，$\boldsymbol{B}_j$ 表示回路集合或互质的几个回路的并集C_j，则如果G的边e_l不与顶点 i 关联，$a_{il}=0$，而不管 b_{jl} 的值如何，总有 $a_{il}b_{jl}=0$；即使 e_l 关联于 i，但若不包含于 C_j 中，也有 $b_{jl}=0$，故 $a_{il}b_{jl}=0$；因此，仅当G的边 e_l 关联于顶点 i（从而 $a_{il}=1$ 或 -1），且 e_l 包含于 C_j 中($b_{jl}=1$ 或 -1)时，才有 $a_{il}b_{jl}\neq 0$。反之也成立。最终的 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j^t$ 的计算，只要考虑图 4.21 的四种情况就行了。

从以上所述，假如 C_j 不通过顶点i，则式(4.47)的右边各项为零。而当 C_j 通过 i 时，式(4.47)的右边的非零项数，在 C_j 为回路的情况下为两项，在 C_j 为互质回路的情况下为偶数项($\geqslant 4$)。但是，无论在哪种情况下，都为 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j^t=\boldsymbol{0}$。这个结论对于顶点和回路

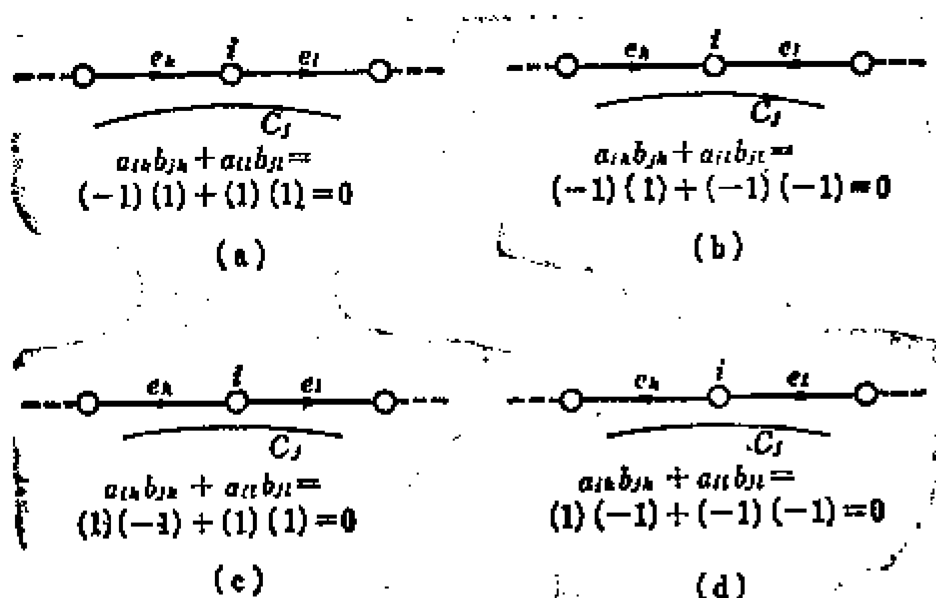


图 4.21　关联于顶点 i 的有向边与通过 i 的回路 C_j

(或互质回路)的任何组合都成立。所以 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_j^t=0$ $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$。即

$$\boldsymbol{A}_e\boldsymbol{B}_e^t=0 \tag{4.48}$$

因为有向图G的基底关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 以及关于G的林（当 $\rho=1$ 时为树）的基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}_f$ 分别包含于 $\boldsymbol{A}_e$、$\boldsymbol{B}_e$ 之中，所以下式成立。

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_f^t=0 \tag{4.49}$$

设$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}_f$的列按同一顺序排列，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{11}\ \ \boldsymbol{A}_{12}]$，$\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U}\ \ \boldsymbol{B}_{f12}]$。不言而喻，如果$G$是连通的，则 $\boldsymbol{A}_{11}$ 和 $\boldsymbol{U}$ 的列代表补树，而$\boldsymbol{A}_{12}$ 和 $\boldsymbol{B}_{f12}$ 的列代表树。若$|\boldsymbol{A}_{12}|\neq 0$，则根据式(4.49)，有向图的$G$的基本回路矩阵可由同图的基底关联矩阵利用下式求得。

$$\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U}\ \ -(\boldsymbol{A}_{12}^{-1}\boldsymbol{A}_{11})^t] \tag{4.50}$$

按式(4.48)可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_e^t=0$，由这个正交性及回路矩阵包含着基本回路矩阵，可知下述问题跟无向图的情况完全相同，即当有向图G由 b 条边、n 个顶点以及 ρ 个连通片组成时，这个图的回路矩阵 $\boldsymbol{B}_e$ 的秩为 $b-n+\rho$。根据这一点，在有向图G的回路矩阵 $\boldsymbol{B}_e$ 中，当$(b-n+\rho)\times b$ 的子矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有秩数$(b-n+\rho)$ 时，这个矩阵

B 就叫做有向图的基底回路矩阵。基底回路矩阵 **B** 的任意行(行向量)，可用基本回路矩阵的行向量的线性组合表示，所以，**B** 与 $\boldsymbol{B}_f$ 的关系式由下式给出：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_f \tag{4.51}$$

式中 **D** 是正则的，$|\boldsymbol{D}|\neq 0$。

例如，对于图 4.19 中图的一个基底回路矩阵，按式(4.44)选成下列形式：

$$\boldsymbol{B}=\begin{matrix} \\ C_3 \\ C_4 \\ C_6 \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} a & c & e & b & d & f \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{4.52}$$

然后，将同一个有向图的基本回路矩阵取作式(4.46)的形式，则 **B** 与 $\boldsymbol{B}_f$ 的关系为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}_f=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{matrix} \begin{matrix} a & c & e & b & d & f \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{4.53}$$

显然，$|\boldsymbol{D}|=-1$，**D** 是正则的。

习　题

[1] 设具有 n 个顶点的连通图为 G。这时，(i)是连通的，(ii)有 n 个顶点，(iii)有 $n-1$ 条边，(iv)没有回路。试证明这样的四个条件中，如果子图 g 满足三个条件，便能导出其余的一个条件，即证明下列命题是等价的。其中把树的定义作为命题(2)。

(1) g 是树。

(2) g 是连通的且具有 n 个顶点和 $(n-1)$ 条边。

(3) 在 H 上没有回路，有 n 个顶点和 $(n-1)$ 条边。

(4) H 是没有回路，有 n 个顶点的连通图。

(5) H有 n 个顶点、在任何两个顶点间都只存在唯一的路径。

［2］ 试证明：在平面图G及其对偶图 G^* 上，G的回路及割集在对偶图中分别对应于割集与回路。

［3］ 试证明：在连通的欧拉图中，存在着包含所有边的闭边列。

［4］ 试证明：当连通的图G仅仅两个顶点的次数是奇数，其他所有顶点的次数都为偶数时，G便可能被一笔画出的。

［5］ 对于图 4.22(a)、(b)，具体的求出闭边列及开边列。

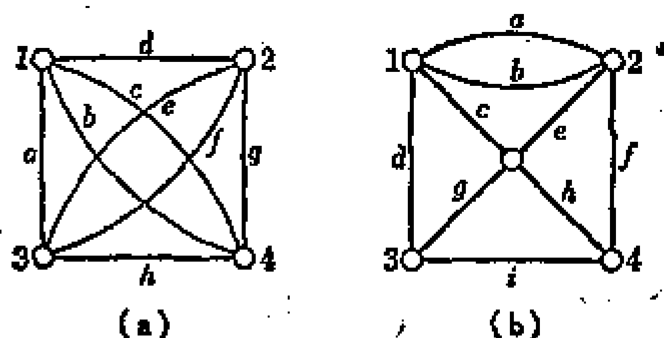


图 4.22

［6］ 列举出图 4.22(a)的全部欧拉子图。

［7］ 试证明：当图G的两个顶点 i、j $(i\neq j)$ 间的路径为 P_1、P_2 时，$P_1 \oplus P_2$ 是G的欧拉子图。

［8］ 试证明：当G由 ρ (>1) 个连通片组成时，回路矩阵 B_a 的秩是 $b-n+\rho$。这里，b、n 分别是G的边数和顶点数。

［9］ 试证明：在连通图G的基底回路矩阵 B 中，对应其最大阶数子矩阵的列的边，成为G的补树的充要条件是它的行列式为正则的。

［10］ 对于图 4.23 的基本非平面图，试在把树取作 $T_1=\{a, b, c, d\}$ 与 $T_2=\{a, b, h, i\}$的情况下，从基本回路矩阵求出基本割集矩阵。

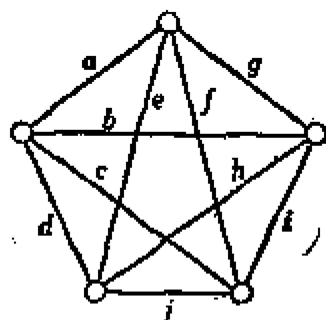


图 4.23

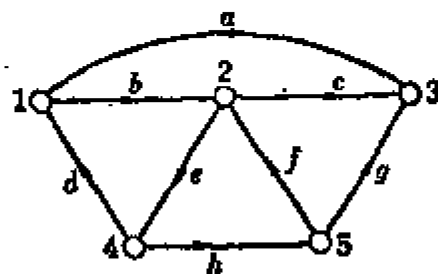


图 4.24

［11］ 对于图 4.24 的有向图，试求当树为 $T_1=\{b, c, e, f\}$ 及 $T_2=\{a, b, d, g\}$时的基本回路矩阵。

参考文献

1) L. Euler: The Königsberg Bridges, Sci. Amer., 189(1)(1953) p. 66—70

2) W. W. R. Ball and H. S. M. Coxeter: Mathematical Recreations and Essays, Mac Millan, New York (1947)

3) H. Whitney: On the Abstract Properties of Linear Dependence, Amer. J. Math., Vol. 57 (1935), p. 509—533

4) H. Whitney: 2-Isomorphic Graphs, Amer. J. Math., Vol. 55 (1933), p. 245—254

5) S. Seshu and M. B. Reed: Linear Graphs and Electrical Networks, Addison-Wesley (1961)

6) W. H. Kim & R. T. Chien: Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia Univ. Press (1962)

7) W. Mayeda: Graph Theory, Wiley-Interscience (1972)

8) O. Wing and W. H. Kim: The Path Matrix and its Realizability, IRE Trans. on CT, CT-6 (1959), p. 261—272

9) M. Iri: A Necessary and Sufficient Condition for a Matrix to be The Loop or Cut-set Matrix of a Graph and a Practical Method for the Topological Synthesis of Networks, RAAG Res., 3, No. 50(1960)

10) T. Kamae: A Systematic Method of Finding All Directed Circuits and Enumerating All Directed Paths, IEEE Trans. on CT, CT-14, (1967), p. 166—171

11) T. Kamae: The Existence of a Hamilton Circuits in a Tree Graph, IEEE Trans. on CT, CT-14 (1967), p. 279—283

12) 岸・梶谷: ホグラフのハミルトン閉路の一構成法，電子通信學會論文誌,50(1967), p. 2291—2298

13) 有吉:有向道および有向閉路の一算法，電子通信學會誌，52A(1969), p. 101—102

14) 梶谷: 基本閉路行列の形態上の特征に関する考察, 53A (1970), p. 73—80

15) 篠田・大類: 岡田の木算出法と単純閉路の代数的取扱い, 54A (1971), p. 117—123

16) 高橋・尾崎: 有向閉路をもたないグラフの生成，電子通信學會論文誌,54A (1971), p. 193—199

第五章　在电路和电子线路方面的应用

【要点】　本章以迄今所学过的图论为基础，对电路(通常称为网络)进行描述和分析。用图的拓扑的观点说明基尔霍夫定律，戴勒亨定理，关于电路的电流变量和电压变量的回路(电流)变换和节点①(电压)变换、网络函数等。最后，将电路分析的节点(电位)法和回路(电流)法相对照来进行学习。

对复杂电路进行分析和利用状态方程求解历来很繁琐，由于大型、高速电子计算机的出现，变得容易了。但又要求有系统的计算方法。被称作电子电路CAD(computer aided design，计算机辅助设计)的方法也是由计算机而产生的。因而，图论也就成为它的重要基础。

5.1　基尔霍夫电流定律和电压定律

在分析以电阻、电容、电感、变压器、电源作为组成元件的集中参数电路时，基尔霍夫电流定律和电压定律是不可缺少的。这是众所周知的事实。此二定律，无论在无源电路还是有源电路中，在任何瞬时均成立。因此运用欧姆定律建立和推导电路方程只是它们的一个普通的例子。

① 按照习惯说法，图論中"顶点"在电路中称为"节点"，"边"在电路中称为"支路"。——译者

本节从用图论将基尔霍夫电流定律（Kirchhoff's current law，缩写为 KCL)和电压定律(Kirchhoff's voltage law，缩写为 KVL)公式化开始讲起。

首先，若把电路的元件与图的支路相对应作为用图表示给定电路的一种方法，则元件的连接关系，亦即电路的拓扑结构便一目了然。也有像变压器那样的，即使有着电的联系，其对应的图的情况却是非连通的。图 5.1 表示电路所对应的图。

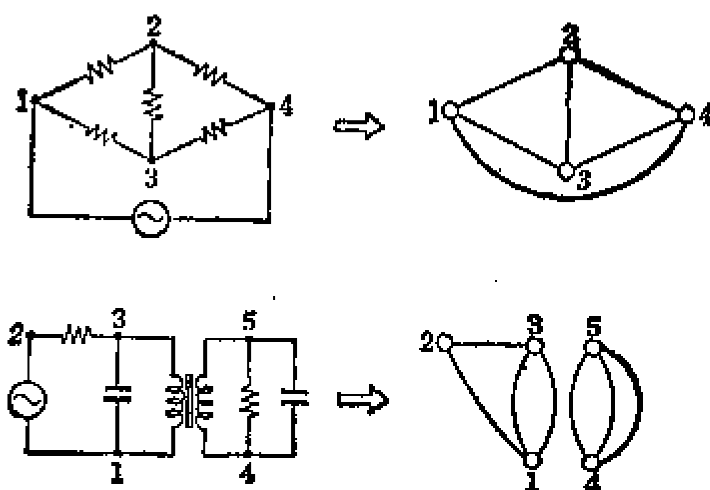


图 5.1 用图表示电路

电路中流过各元件的电流，在图中，可以用标有电流方向的有向支路和加上了电流值(电流变量)的有向图表示。图 5.2 所示的是电容和电阻的梯形电路举例。假设该电路中各元件所流过的电流如图(a)所示时，表示电流的有向图是图(b)所示的对应于七个

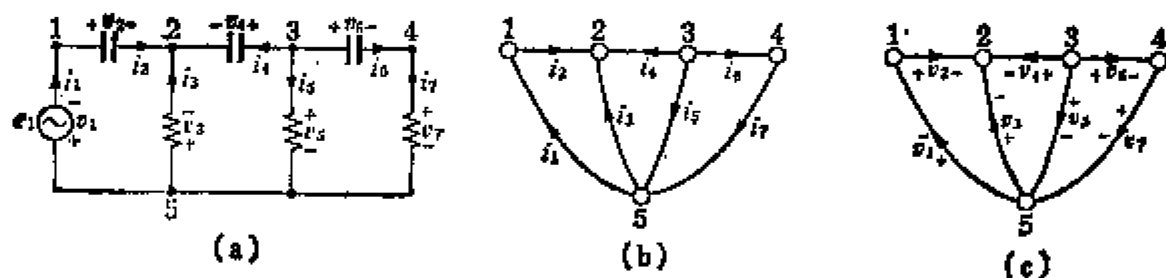


图 5.2 (a) 电路，(b) 表示流过各元件的电流方向和电流值(或电流变量)的有向图，(c) 表示各元件的电压极性（电压的方向)和电压值(或电压变量)的有向图

元件的七条有向支路。另一方面，各元件的电压及其方向也同样地用有向支路表示。这种情况下，电压的方向统一规定为高电位处是有向支路箭头的尾部，或者也可规定为头部。在此，规定用同一个有向图表示电流和电压，并规定有向支路箭头的尾部电位比头部高[如图 5.2(c)所示]。

[1] KCL(基尔霍夫电流定律)

设电路的有向图有 b 条支路，有向支路的电流用向量的形式表示，称之为电流向量 $\boldsymbol{I}_e=[i_1\ i_2\cdots i_b]^t$。其中的电流 $i_1, i_2, \cdots, i_b$ 是流过元件的电流，同时也表示与电路对应的有向图中支路的名称。如果利用这个有向图的关联矩阵 $\boldsymbol{A}_e$，因流入任一节点的电流的总和为 0，则对一切节点 KCL 都可用下式清楚地表示出来。这里假设不存在由电流源组成的关联集合*1，把 $\boldsymbol{A}_e$ 的列的次序与 $\boldsymbol{I}_e$ 的行的次序相对应时，

克希荷夫电流定律(KCL)：$A_eI_e=0$*2 (5.1)

图 5.2(b)为表示电流的有向图，由此得到

$$\boldsymbol{A}_e=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7\end{array}\\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\end{bmatrix}\end{array} \tag{5.2}$$

因此，若以 $\boldsymbol{I}_e=[i_1\ i_2\ i_3\ i_4\ i_5\ i_6\ i_7]^t$ 计算 $\boldsymbol{A}_e\boldsymbol{I}_e$，则得下式

---

*1 如果存在这样的关联集合，将产生不满足 KCL 的情况。

*2 全部元素为 0，即表示电流向量为零。

$$
A_a I_e = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} i_1 & i_2 & i_3 & i_4 & i_5 & i_6 & i_7 \end{array} \\
\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}
\begin{bmatrix} -i_1 + i_2 \\ -i_2 - i_3 - i_4 \\ i_4 + i_5 + i_6 \\ -i_6 + i_7 \\ i_1 + i_3 - i_5 - i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}
$$

上式的第1行表示从所对应的节点1流出的电流总和 $i_2+(-i_1)$为0，第3行表示从节点3流出的电流总和为0，即 $i_4+i_5+i_6=0$。其他节点依照同样方法。在表示电路的有向图的关联矩阵中，各行表示与该行所代表的节点相连接的支路，从该节点向外的支路其元素为(+1)，进入的边其元素为(−1)。因此，这个行向量与电流向量 I_e 的积表示从该节点流出的电流之和。这也可以对任何一行而言，因而最终得到 KCL 的线性方程式 $A_aI_e=0$。由于 A_a 所有的行不全是独立的，因而用基底关联矩阵 A，从 $AI_e=0$ 得到的线性方程式，是 $A_aI_e=0$ 中的独立线性方程式。所以，用 $AI_e=0$ 就能满足 KCL。例如，在式(5.3)中，若将前四行相加，从节点1,2,3,4流出的电流的总和为 $-i_1-i_3+i_5+i_7(=0)$，即为流入节点5的电流的总和。

任何割集可以由关联集合的线性组合得到。因此，根据式(3.29)$Q=DA(|D|\neq0)$和 $AI_e=0$ 得

$$
DAI_e=0 \quad 即 \quad QI_e=0 \tag{5.4}
$$

该式也满足 KCL。

图 5.2(b)的基本割集矩阵，当选树为 $T=\{i_1,\ i_3,\ i_5,\ i_7\}$ 时，得式(5.5)。

$$
Q_f=\begin{array}{c} \\ Q_{t_1} \\ Q_{t_3} \\ Q_{t_5} \\ Q_{t_7} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} i_2 & i_4 & i_6 & i_1 & i_3 & i_5 & i_7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \end{array}
\tag{5.5}
$$

将 $I_e=[i_2\ i_4\ i_6\ i_1\ i_3\ i_5\ i_7]^t$ 乘以式(5.5)时

$$
Q_fI_e=\begin{array}{c} Q_{t_1} \\ Q_{t_3} \\ Q_{t_5} \\ Q_{t_7} \end{array}
\left[\begin{array}{l}
-i_2+i_1 \\
\quad i_2+i_4+i_3 \\
\quad i_4+i_6+i_5 \\
-i_6+i_7
\end{array}\right]
\tag{5.6}
$$

式(5.3)和式(5.6)相比较，Q_fI_e 的第 1 行、第 2 行，分别等于 A_eI_e 的第 1 行乘以 -1、第 2 行乘以 -1 的值，Q_fI_e 的第 3 行和第 4 行，分别与 A_eI_e 的第 3 行和第 4 行相等。因此，$Q_fI_e=0$，这只不过意味着各节点的 KCL。但式(5.6)的第 1 行和第 2 行分别表示流入节点 1 和节点 2 的电流的总和。而第 3 行和第 4 行分别表示从节点 3 流出的电流总和及从节点 4 流出的电流总和。

若在同一个表示电流的有向图中，设另一个树 $T=\{i_2,\ i_3,\ i_5,\ i_6\}$，则

$$
Q_fI_e=\begin{array}{c} \\ Q_{t_2} \\ Q_{t_3} \\ Q_{t_5} \\ Q_{t_6} \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} i_1 & i_4 & i_7 & i_2 & i_3 & i_5 & i_6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccc}
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \end{array}
\left[\begin{array}{c} i_1 \\ i_4 \\ i_7 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_5 \\ i_6 \end{array}\right]
$$

$$= \begin{matrix} Q_{l_1} \\ Q_{l_2} \\ Q_{l_3} \\ Q_{l_4} \end{matrix} \begin{bmatrix} i_2 - i_1 \\ i_3 + i_1 + i_4 \\ i_5 + i_4 + i_7 \\ i_6 - i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.7}$$

各基本割集和 $Q_f I_e = 0$ 的意义如图 5.3 所示。若考虑割集的方向，在式(5.7)中

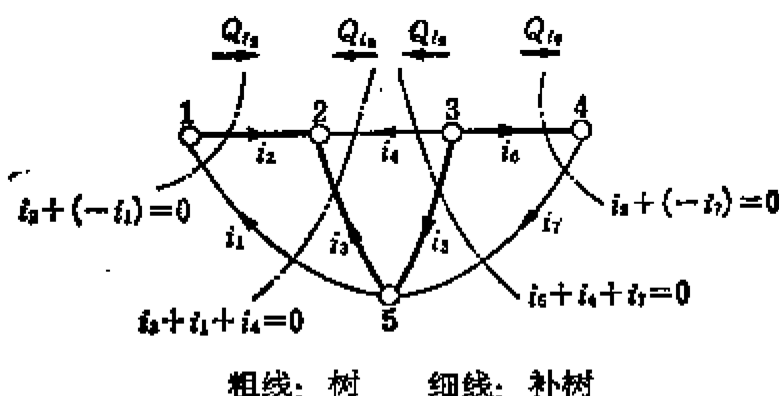


图 5.3　有向割集与 $Q_f I_e = 0$ 的含义

第 1 行 = 从节点{ 1 }流向由节点{2, 3, 4, 5}所组成的子图[*1]的电流总和；

第 2 行 = 从节点{3,4,5}所组成的连通子图流向节点{1,2}所组成的连通子图的电流总和；

第 3 行 = 从节点{3,4}所组成的连通子图流向节点{1,2,5}所组成的连通子图的电流总和；

第 4 行 = 从节点{1,2,3,5} 所组成的连通子图流向节点 { 4 } 的电流总和。

这样，$A_e I_e = 0$ 表示各节点流出的电流的总和为 0。$Q_e I_e = 0$ 表示在各割集(或者互质的割集的并集)中，沿着以该割集(或者互质的割集的并集) 所具有的方向为正方向的割集的支路流过的电流总和恒为 0 ，即在由割集(或者互质的割集的并集)所产生的两

*1　由节点 2,3,4,5 组成的连通子图。

个子图之间，从一个流向另一个的电流总和为 0。

[2] KVL（基尔霍夫电压定律）

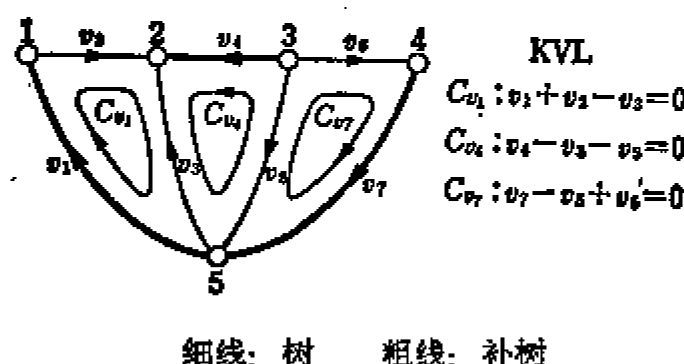


图 5.4　在表示电压的有向图中的基本回路和对应于各回路的基尔霍夫电压定律

基尔霍夫电压定律表明，在表示电路中各元件电压的有向图中，沿任意回路循行一周时，该回路所包含的支路的电压的总和为0。例如，在图 5.4 中，考察一下 C_{v_1} 这样一个基本回路。在 $C_{v_1}=\{v_1, v_2, v_3\}$ 中，C_{v_1} 的方向为顺时针方向，并且 v_1 和 v_2 的方向与 C_{v_1} 的方向一致，v_3 的方向与 C_{v_1} 的方向相反。因此，在该回路中的电压总和为 $v_1+v_2+(-v_3)=0$。对于其他回路也同样。

设表示各元件电压的电压向量为 $\boldsymbol{V}_e=[v_1, v_2, \cdots, v_b]^t$，利用回路矩阵，KVL 通常用下式表示，但设在电路中不含只由电压源组成的回路*1。

基尔霍夫电压定律：$\boldsymbol{B}_e\boldsymbol{V}_e=0$　　(5.8)

回路矩阵 $\boldsymbol{B}_e$ 的行，包含着回路与互质回路的并集。但对于互质回路的并集来说，构成它们的各个回路都满足 KVL，这是明显的，所以由式(5.8)得到的全部线性方程式通常并不都是独立的，实际上存在着从属的多余方程式。对于代数中的 $\boldsymbol{B}_e$ 的适当的基底回路矩阵 $\boldsymbol{B}$，若使

---

*1　如果存在这样的回路，将产生不满足 KCL 的情况。

$$BV_e=0 \tag{5.9}$$

则满足 KVL。

可以用基本回路矩阵 B_f 作为基底回路矩阵。例如，在图 5.4 的有向图中，设树为 $T=\{v_2, v_3, v_5, v_6\}$，补树为 $T^c=\{v_1, v_4, v_7\}$，因此，由补树的连支 v_1, v_4, v_7 得基本回路 $C_{v_1}, C_{v_4}, C_{v_7}$。回路的方向与各连支的方向一致时，基本回路矩阵为

$$B_f=\begin{matrix} \\ C_{v_1} \\ C_{v_4} \\ C_{v_7}\end{matrix}\begin{matrix} v_1 & v_4 & v_7 & & v_2 & v_3 & v_5 & v_6 \\ \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0\end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0\end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{matrix} & \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots\end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0\end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ 0\end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ -1\end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{matrix}\right]\end{matrix} \tag{5.10}$$

因此，有关各个回路的 KVL 为下式

$$B_fV_e=\begin{matrix} C_{v_1} \\ C_{v_4} \\ C_{v_7}\end{matrix}\begin{bmatrix} v_1+v_2-v_3 \\ v_4-v_3-v_5 \\ v_7-v_5+v_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

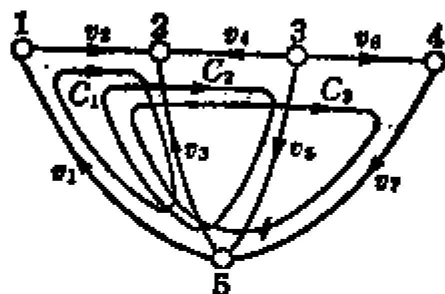


图 5.5 KVL 定律应用于独立的回路

又，在同一个图中，如图 5.5 那样选取独立回路 C_1、C_2、C_3 时，得到三个独立方程，用矩阵表示则为

$$BV_e=\begin{matrix} \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3\end{matrix}\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1\end{matrix}\right. & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1\end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0\end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ -1\end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0\end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1\end{matrix}\right]\end{matrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} v_1+v_2-v_3 \\ v_1+v_2-v_4+v_5 \\ v_1+v_2-v_4+v_6+v_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0\end{bmatrix}$$

5.2 基本回路电流和节点电压

基尔霍夫电流定律可以表示为方程式 $\boldsymbol{AI_e}=0$。为了求出关于电流变量 $i_1, i_2, \cdots, i_b$ 的齐次线性方程的解，先将基底关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块成 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{11} \quad \boldsymbol{A}_{12}]$，使 $\boldsymbol{A}_{11}$ 的列对应于补树（或者补林），$\boldsymbol{A}_{12}$ 的列对应于树（或者林）。然后将电流向量 $\boldsymbol{I}_e=[i_1\ i_2 \cdots i_b]^t$ 的元素（电流变量）对应于 $\boldsymbol{A}$ 的列这样地排列。设连支电流向量和树支电流向量分别为 $\boldsymbol{I}_c$，$\boldsymbol{I}_t$。

$$\boldsymbol{I}_e=\begin{vmatrix}\boldsymbol{I}_c\\ \boldsymbol{I}_t\end{vmatrix} \tag{5.13}$$

因为 $\boldsymbol{AI_e}=0$，得 $\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{I}_c+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{I}_t=0$。因此，树支的电流可以用连支电流所代表的回路电流表示如下：

$$\boldsymbol{I}_t=-\boldsymbol{A}_{12}^{-1}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{I}_c \tag{5.14}$$

因此，根据式(5.13)和式(5.14)，电流向量$\boldsymbol{I}_e$ 可以用式(5.15)从连支的电流向量 $\boldsymbol{I}_c$ 求得。

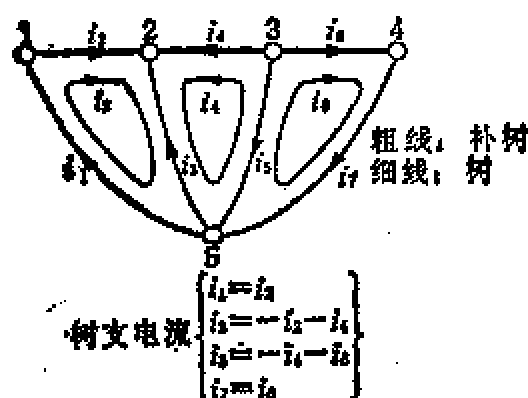
$$\boldsymbol{I}_e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{U}\\ -\boldsymbol{A}_{12}^{-1}\boldsymbol{A}_{11}\end{bmatrix}\boldsymbol{I}_c \tag{5.15}$$

最终，若利用式(4.50)将 $\boldsymbol{I}_e$ 和 $\boldsymbol{I}_c$ 用基本回路矩阵相联系，很容易得到

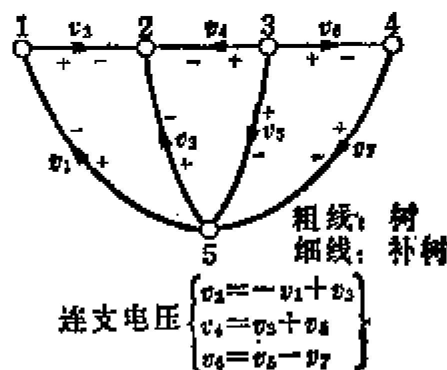
$$\boldsymbol{I}_e=\boldsymbol{B}_f^t\boldsymbol{I}_c \tag{5.16}$$

该式称为回路变换(circuit or mesh transformation)，它说明电路中各元件的电流可以用取决于补树的回路电流来表示（或决定）。在实际的电路中若有电流源，因其值为已知，必须将其对应于补树的连支来分析。在图 5.6(a)中，取它的一个基本回路矩阵为式(5.17)。

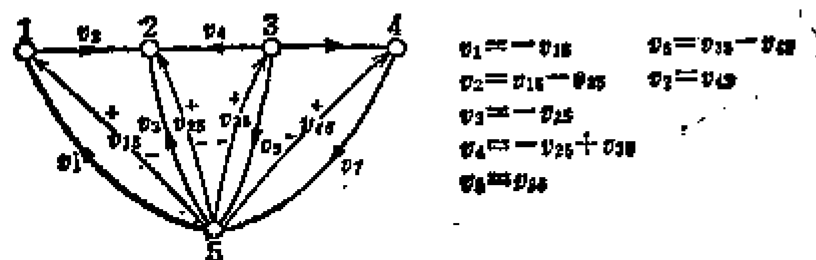
$$
\boldsymbol{B}_f=\begin{matrix} C_{l_2} \\ C_{l_4} \\ C_{l_6} \end{matrix}\overset{\begin{matrix} i_2 & i_4 & i_6 & i_1 & i_3 & i_5 & i_7 \end{matrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}} \tag{5.17}
$$



(a) 用基本回路电流表示树支电流[式(5.16)]



(b) 用树支电压表示连支电压[式(5.21)]



(c) 用节点电压表示支路电压[式(5.25)]

图5.6

将电流变量向量 $\boldsymbol{I}_e$ 的元素对应于 $\boldsymbol{B}_f$ 的各列，设 $\boldsymbol{I}_e=[i_2\ i_4\ i_6\ i_1\ i_3\ i_5\ i_7]^t$ 时，由式(5.16)可得由基本回路电流表示的各支路电流的表示式如下。这时，连支电流向量 $\boldsymbol{I}_l=[i_2\ i_4\ i_6]^t$。因此

$$
\boldsymbol{I}_e=\begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_6 \\ i_1 \\ i_3 \\ i_5 \\ i_7 \end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_f^t\boldsymbol{I}_l=\begin{bmatrix} i_2 \\ i_4 \\ i_6 \\ i_2 \\ -i_2-i_4 \\ -i_4-i_6 \\ i_6 \end{bmatrix} \tag{5.18}
$$

若看一下基本回路 $C_{i_2}=\{i_2, i_1, i_3\}$，可知，由式(5.18)得：$i_1=i_2$，$i_3=-i_2-i_4$，因而连支电流 i_2 与沿基本回路 C_{i_2} 循行流过的基本回路电流 i_2 相同。关于其他回路也同样。又可得知，树的任意一个树支电流可以用基本回路电流的叠加，即线性组合来表示。

然后，转而说明各支路电压和树支电压的关系以及各节点电压与树支电压的关系。在电路电压的图中，适当选取一树，设关于该树的基本回路矩阵为 $\boldsymbol{B}_f$。设各支路电压为 $v_1, v_2, \cdots, v_e$，并将此电压向量 $\boldsymbol{V}_e$ 分块为对应于连支的电压向量 $\boldsymbol{V}_c$ 和对应于树支的电压向量 $\boldsymbol{V}_t$，

$$\boldsymbol{V}_e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_c\\ \boldsymbol{V}_t\end{bmatrix} \tag{5.19}$$

根据基尔霍夫电压定律 $\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{V}_e=0$ 可得

$$\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{V}_e=[\boldsymbol{U}\quad \boldsymbol{B}_{f12}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{V}_c\\ \boldsymbol{V}_t\end{bmatrix}=\boldsymbol{V}_c+\boldsymbol{B}_{f12}\boldsymbol{V}_t=0 \tag{5.20}$$

即

$$\boldsymbol{V}_c=-\boldsymbol{B}_{f12}\boldsymbol{V}_t \tag{5.21}$$

该式说明，“连支的电压可用树支的电压表示(决定)”。即表明连支电压可以用树支电压的代数叠加(线性组合)表示。例如，在图5.6(b)的电压图中，若取树为 $T=\{v_1, v_3, v_5, v_7\}$，得

$$\boldsymbol{B}_{f12}=\begin{matrix} & \begin{matrix}v_1 & v_3 & v_5 & v_7\end{matrix}\\ & \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{matrix} \tag{5.22}$$

因而，若利用式(5.21)，连支电压向量为下式。

$$\boldsymbol{V}_c=\begin{bmatrix}v_2\\ v_4\\ v_6\end{bmatrix}=-\boldsymbol{B}_{f12}\boldsymbol{V}_t=-\begin{matrix}\begin{matrix}v_1 & v_3 & v_5 & v_7\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_3\\ v_5\\ v_7\end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} -v_1+v_3 \\ v_3+v_5 \\ v_5-v_7 \end{bmatrix} \tag{5.23}
$$

第1行的含义是，连支电压 v_2 由树支电压 v_1 和 v_3 决定，可以表示为 $v_2=-v_1+v_3$。显然 $v_1+v_2=v_3$ 也是成立的，因为从节点5到节点2的电位差(v_3)等于从节点5到节点1的电位差(v_1)加上节点1到节点2的电位差(v_2)。其余二式也同样。

将式(5.21)代入式(5.19)得电压向量

$$
V_e=\begin{bmatrix} -B_{f12} \\ U \end{bmatrix} V_t \tag{5.24}
$$

即，任一支路的电压可以用树支电压来表示，因而当树支电压给定时，各支路电压就确定了。

若利用式(4.18)，式(5.24)则变为

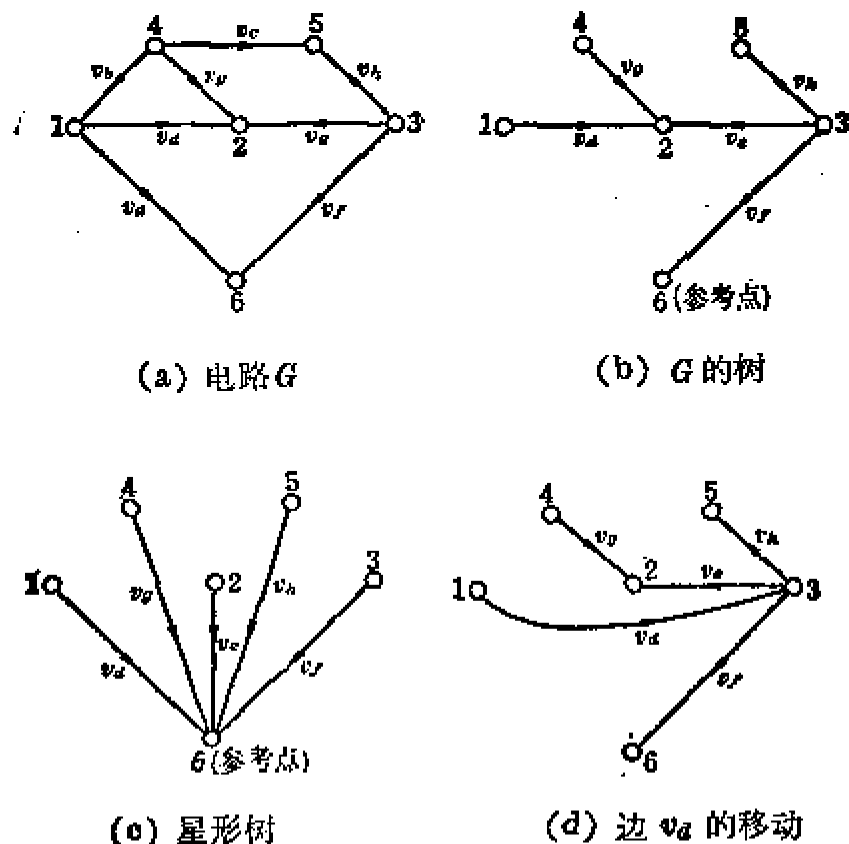


图5.7 $(A_{12}^t)^{-1}V_t$ 的说明

$$\boldsymbol{V}_e=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^t(\boldsymbol{A}_{12}^t)^{-1}\\ \boldsymbol{A}_{12}^t(\boldsymbol{A}_{12}^t)^{-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{V}_t=\boldsymbol{A}^t(\boldsymbol{A}_{12}^t)^{-1}\boldsymbol{V}_t \tag{5.25}$$

若定义新的电压向量 $\boldsymbol{V}_n$ 为

$$\boldsymbol{V}_n=(\boldsymbol{A}_{12}^t)^{-1}\boldsymbol{V}_t \tag{5.26}$$

式(5.25)则变为

$$\boldsymbol{V}_e=\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{V}_n \tag{5.27}$$

该式表明，$\boldsymbol{V}_e$ 的全部元素可以用 $\boldsymbol{V}_n$ 的元素的线性组合来表示。$\boldsymbol{V}_n$ 的元素是什么样的电压呢？让我们举图 5.7(a) 的电路 G 为例分析一下 $\boldsymbol{V}_n$ 的元素。

设以 G 的节点 6 为参考点 (reference node, datum node ground) 的基底关联矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\overset{\qquad\qquad\boldsymbol{A}_{11}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\boldsymbol{A}_{12}}{\begin{array}{ccc:ccccc} v_a & v_b & v_c & v_d & v_e & v_f & v_g & v_h\\ \hline 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{array}} \tag{5.28}$$

因此 $(\boldsymbol{A}_{12}^t)^{-1}\boldsymbol{V}_t$ 为

$$\boldsymbol{V}_n=(\boldsymbol{A}_{12}^t)^{-1}\boldsymbol{V}_t=\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_d\\ v_e\\ v_f\\ v_g\\ v_h\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}v_d-v_e+v_f\\ -v_e+v_f\\ v_f\\ -v_e+v_f+v_g\\ v_f-v_h\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{16}\\ v_{26}\\ v_{36}\\ v_{46}\\ v_{56}\end{bmatrix}$$

很清楚，V_n 的元素是设参考点为节点 6 时的节点电压 v_{16}，v_{26}，v_{36}，v_{46}，v_{56}。接着来解释为什么 $(A_{12}^t)^{-1}V_t$ 变成了节点电压向量。与 A_{12} 对应的树示于图 5.7(b)，将矩阵 A_{12} 用列的初等变换为单位矩阵，与将这个树变换为图 5.7(c)所示的星形(树)是相同的。

现在研究变换成星形的步骤。首先，将支路 v_d 从节点 1 连接到参考点。从节点 1 到参考点的路径是 (v_d, v_e, v_f)。支路 v_e 的方向与该路径的方向不一致，因而若 A_{12} 的列 v_d 减去列 v_e，支路 v_d 应从节点 1 连接到节点 3。换言之，这个计算所得的矩阵，是支路 v_d 从节点 1 换接到节点 3 所得的图 5.7(d)的树的基底关联矩阵。然后，由于支路 v_f 的方向与路径的方向一致，当列 v_f 加到列 v_d 上时，支路 v_d 从节点 1 换接到参考点。若其他支路也用同样的方法换接，就能变换成星形的树。为了表示这种换接方法，定义矩阵 P。

$$P = [p_{ij}] \tag{5.29}$$

是 $n-1$ 次方阵，其元素 p_{ij} 为：

$$p_{ij} = \begin{cases} 1: & \text{支路 } j \text{ 属于从节点 } i \text{ 到参考点的路径，支路的方向与路径的方向一致时} \\ -1: & \text{支路 } j \text{ 属于从节点 } i \text{ 到参考点的路径，支路的方向与路径方向不一致} \\ 0: & \text{其他情况} \end{cases}$$

在此应该注意，P 的行表示路径，而为了与 A_{12} 的行对应，从 A_{12} 的第 i 行所表示的节点 i 到参考点的路径，用 P 的第 i 行表示。由图 5.7(b)的树所得的矩阵 P 为

$$P = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

P 的第 i 行表示为了将支路从节点 i 换接到参考点所必需的 A_{12} 的列的初等变换，因而

$$A_{12}P_t = P_tA_{12}^t = U \quad (5.30)$$

此式表明 P 为 A_{12}^t 的逆矩阵，所以式(5.26)变为

$$V_n = PV_t$$

P 的第 i 行 P_i 表示从节点 i 到参考点的路径，同时，由于根据支路的方向与路径的方向一致或者不一致而取 +1 或者 -1，所以 P_iV_t 为从节点 i 到参考点的路径上的树支电压之和，即从节点 i 到参考点的电压，PV_t 为电压向量。因此，显然式(5.27)是所有支路电压作为节点电压的线性组合的表达式。为此，式(5.27)称为节点变换 (node transformation)。

5.3 戴勒亨定理(Tellegan's theorem)

这个定理是一般性定理，对于任何电路，只要是满足基尔霍夫电压定律和电流定律的集中参数电路，该定理均成立。因此该定理用于对电路的能量守恒定律、策动点阻抗、互易定理等从图论观点看的新的研究方法和证明中。此戴勒亨定理仅仅基于 KVL 和 KCL，因此无论电路是有源电路还是无源电路，是线性电路还是非线性电路，是时变电路(time variant)还是非时变电路(time-invariant)，定理都成立。

[1] 戴勒亨定理

现在研究任一集中参数电路。设它的图有 b 条支路和 n 个节点。只要各支路电压满足 KVL，取任意值均可。另外，只要各支路电流满足 KCL，取任意值也可。这时，各支路电压和电流可以是完全独立(无关)的(不言而喻，在电压和电流二者之间，欧姆定律成立，即使是非线性的关系也无妨)。但是，读取各支路的电

压值和电流值须恰当地确定极性，如图 5.8 所示。这时，若设支路电压为 $v_1, v_2, \cdots, v_6$，支路电流为 $i_1, i_2, \cdots, i_6$，则

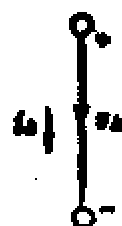
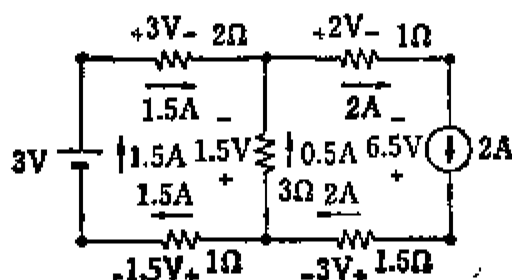


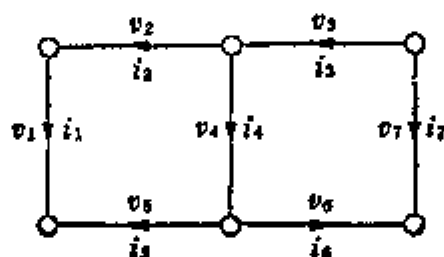
图 5.8 在戴勒亨定理中各支路的电压和电流的极性

戴勒亨定理 $\sum_{k=1}^{6} v_k i_k = V_e^t I_e = 0$ (5.82)

先看证明该定理的第一个例子。图5.9(a)是线性无源电路。与分析电路时要恰当地选定电压和电流的方向一样，对于该电路要画恰当的有向图，如图(b)所画。



(a)



(b)

图 5.9 线性无源电路及其图

$$v_1 = 3\text{V},\quad v_2 = -3\text{V},\quad v_3 = -2\text{V},\quad v_4 = -1.5\text{V},\quad v_5 = 1.5\text{V},$$
$$v_6 = -3\text{V},\quad v_7 = -6.5\text{V}$$
$$i_1 = -1.5\text{A},\quad i_2 = -1.5\text{A},\quad i_3 = -2\text{A},\quad i_4 = -0.5\text{A},$$
$$i_5 = 1.5\text{A},\quad i_6 = -2\text{A},\quad i_7 = 2\text{A}$$

当然它们满足 KVL 和 KCL，戴勒亨定理可由下式验证。

$$\sum_{k=1}^{7} v_k i_k = -4.5 + 4.5 + 4 + 0.75 + 2.25 + 6 - 13 = 0$$

其次，在图 5.10(a)的电路中，在满足 KVL 和 KCL 的条件下，各元件的电压和电流可任意确定。戴勒亨定理成立，与这样的电路和元件是否实际上存在无关。图(b)的电压向量 $\boldsymbol{V}_e$、电流向量 $\boldsymbol{I}_e$ 分别为

$$\boldsymbol{V}_e^t = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4\ v_5] = [-2\ \ 3\ \ 1\ \ 5\ \ 4]$$

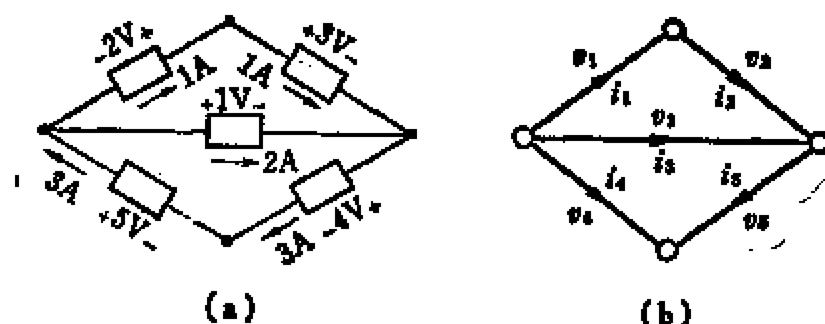


图5.10 仅满足 KVL 和 KCL 的电路及其图

$$I_e=[i_1\ i_2\ i_3\ i_4\ i_5]=[1\ 1\ 2\ -3\ 3]$$

计算 $V_e^t I_e$ 得

$$V_e^t I_e=-2+3+2-15+12=0$$

想必读者已经理解，戴勒亨定理对于这个恰当地构成的电路是成立的。现再看定理的证明。

在电路的有向图中，设其关联矩阵为 $\boldsymbol{A}$，从节点电压 v_{1n}，v_{2n}，…，v_{n-1n} 可求支路电压 v_1，v_2，…，v_5，如式(5.27)所示，即

$$V_e=A^tV_n$$

习惯上把图的参考点设为节点 n。然而

$$\sum_{k=1}^{e} v_k i_k=V_e^t I_e=(A^tV_n)^t I_e=V_n^t(AI_e) \qquad (5.33)$$

因电路满足 KCL，故 $AI_e=0$，结果由上式可见，$V_e^t I_e=0$，戴勒亨定理简单地得以证明[*1]。

此定理对于任何瞬时均成立，所以式(5.32)可以用下式表示。

$$\sum_{k=1}^{e} v_k(t)i_k(t)=0 \qquad t，任意瞬间 \qquad (5.34)$$

因此，该定理的物理意义可以用电路的能量守恒来说明。

$v_k(t)i_k(t)$ 是在瞬时 t，由电路供给支路 e_k 的电功率。式(5.34)的意义是供给各支路电功率的总和为0。换言之，就是如果在

*1 将式(5.16)代入式(5.33)，用式(4.42)的 $AB_f^t=0$ 也可证明。

电路中有若干个独立电源，那么由这些独立电源所供给的电功率的总和等于在其他支路消耗的电功率的总和。因为戴勒亨定理是仅仅基于 KVL 和 KCL 的定理，因此也可以说电路的 KVL 和 KCL 意味着能量守恒定律。例如，在图 5.9 中，因 $\sum_{k=1}^{7} v_k i_k = 0$，下式成立。

$$
\begin{aligned}
\text{供给的电功率} &= -(v_1 i_1 + v_7 i_7) \\
&= v_2 i_2 + v_3 i_3 + v_4 i_4 + v_5 i_5 + v_6 i_6 \\
&= \text{消耗的电功率} = 3 + 1.5 + 6.5 \times 2 \\
&= 4.5 + 13 = 17.5\text{W}
\end{aligned}
$$

还有，在非时变状态的交流电路中，将各支路电压、电流用复数来表示。设有 $V_1, V_2, \cdots, V_b$ 和 $I_1, I_2, \cdots, I_b$，这里 V_k，I_k $(k=1, 2, \cdots, b)$ 是用复数表示的支路 e_k 的电压和电流 $V_k = V_k(j\omega)$、$I_k = I_k(j\omega)$ 的有效值，这时，戴勒亨定理为

根据戴勒亨定理，复功率守恒	$\sum_{k=1}^{b} \bar{V}_k I_k = \sum_{k=1}^{b} \dot{V}_k \bar{I}_k = 0$	(5.35)

这个关于复功率的戴勒亨定理应用于由电阻、电容、电感（包括变压器）组成的线性电网络时，可以求策动点输入阻抗（参看习题[3]），导出正实函数等重要性质。

[2] 戴勒亨扩展定理

现设两个集中参数电路 N、$\hat{N}$ 有相同的结构，即设在 N、$\hat{N}$ 的图 G、$\hat{G}$ 中，有相同的支路数(b)和节点数(n)，而在对应的两个节点间即使连接着不同的元件也可以。极端的情况，即使一个电路的支路开路，另一个电路对应的支路短路也无妨。在表示电路的有向图 G、$\hat{G}$ 中，设对应的各支路电压和电流的极性和方向相同，如图 6.11 所示那样。G 的支路 e_k 的电压和电流分别表示为 v_k，

(a) G 的支路 e_k　(b) $\hat{G}$ 的支路 $\hat{e}_k$

图 5.11　在两个有向图 G 和 G' 中对应各边的电压和电流的极性

i_k；同样，$\hat{G}$ 的对应支路 $\hat{e}_k$ 的电压和电流表示为 $\hat{v}_k$，$\hat{i}_k$。此时，假设 N 满足 KVL；另一方面，$\hat{N}$ 满足 KCL。则

> 戴勒亨扩展定理
>
> $$\sum_{k=1}^{b} v_k \hat{i}_k = 0 \quad (5.36)$$

但是，由于 $v_k \hat{i}_k$ 是一个电路的支路电压与另一个电路所对应的支路电流的乘积，故式(5.36)没有能量这个物理意义。不必说，假设两电路 N 和 $\hat{N}$ 满足 KVL 和 KCL，则 $\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k i_k = 0$。而且

$$\sum_{k=1}^{b} v_k \hat{i}_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k i_k = 0 \quad (5.37)$$

例如，在图 5.12 中，下式成立。

$$\sum_{k=1}^{6} v_k \hat{i}_k = -\frac{1}{2} - 1 + 3 - \frac{3}{4} + 0 - \frac{3}{4} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k i_k = 3 - \frac{3}{2} - 1 + 0 - \frac{1}{2} + 0 = 0$$

由于两个电路的有向图相同，且 KVL 和 KCL 分别成立，戴勒亨扩展定理可以与戴勒亨定理的情况同样简单地证明，因而省略之。

［例题］1　有一个集中参数电路 N，由其中的若干个电源所激励。设在 t_1 瞬时测定的各支路电压值为 $v_k(t_1)(k=1, 2, \cdots, b)$，又在 t_2 瞬时测定的电流值为 $i_k(t_2)(k=1, 2, \cdots, b)$。此时是否可以说 $\sum_{k=1}^{b} v_k(t_1) \hat{i}_k(t_2) = 0$?

［略解］　设在 t_1 时对应于电路 $N(t_1)$ 的图为 G，在 t_2 时对应的图同样是 G。电路满足 KVL 和 KCL，与时间无关。因此，戴

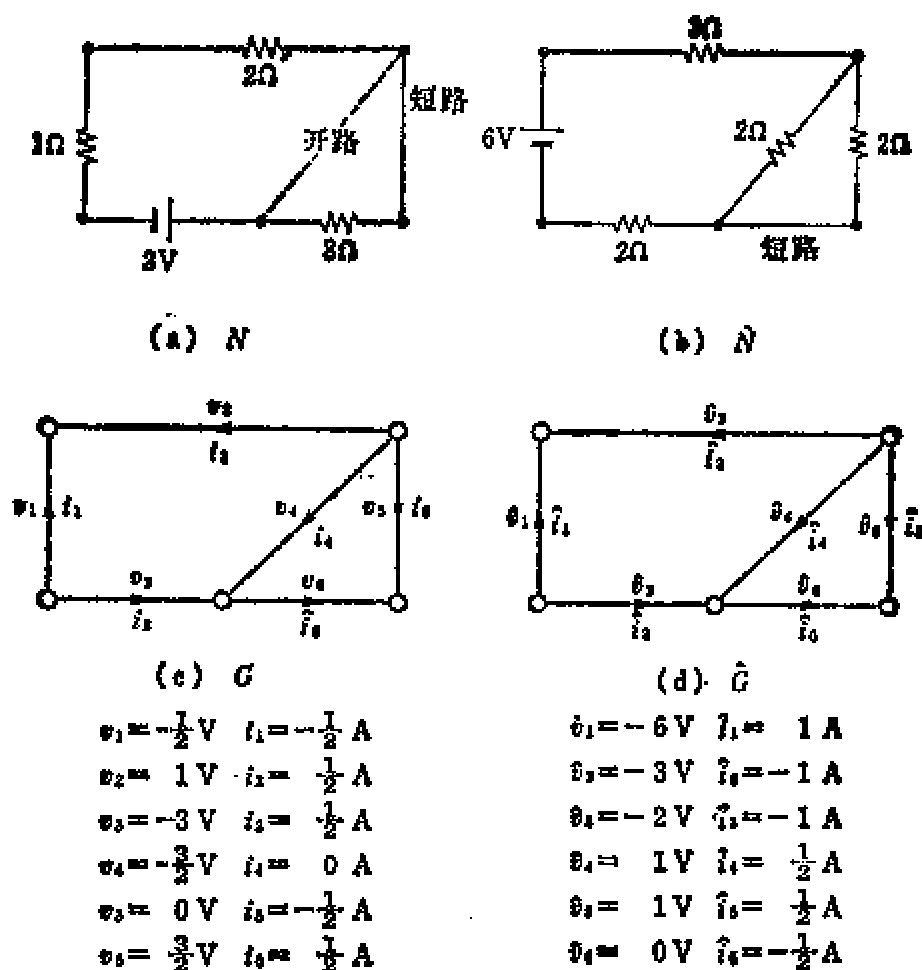


图 5.12 戴勒亨扩展定理的应用

勒亨扩展定理适用，$\sum_{k=1}^{b} v_k(t_1)\hat{i}_k(t_2)=0$。

［例题］2 用戴勒亨定理解互易定理的问题(图 5.13)。试证明在普通的 RLC 交流电路中，对于激励电压源和测量电流的任何支路来说，即使交换它们彼此的作用，测得的电流相同。即在图 5.13 中，$I_2=\hat{I}_1$

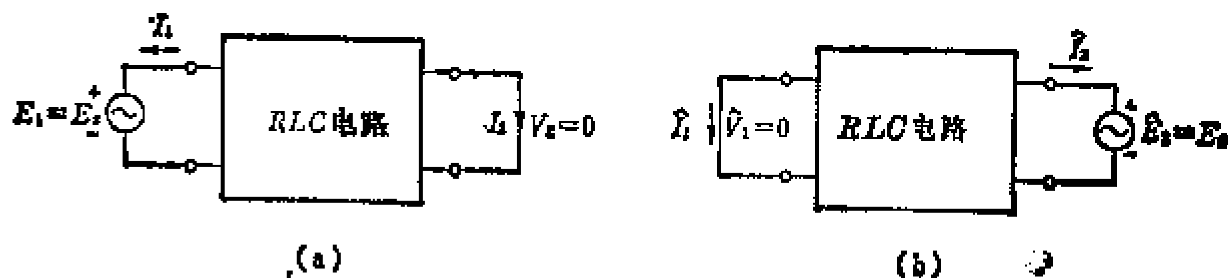


图 5.13 互易定理

〔解〕 在图5.13的 RLC 电路中，设全部元素有 $(b-2)$ 个。首先简写为：$V_k(j\omega)=V_k$，$I_k(j\omega)=I_k$，$\hat{V}_k(j\omega)=\hat{V}_k$，$\hat{I}_k(j\omega)=\hat{I}_k$。根据戴勒亨扩展定理：$\sum_{k=1}^{b} V_k\hat{I}_k=\sum_{k=1}^{b}\hat{V}_kI_k=0$，有

$$V_1\hat{I}_1+V_2\hat{I}_2+\sum_{k=3}^{b}V_k\hat{I}_k=\hat{V}_1I_1+\hat{V}_2I_2+\sum_{k=3}^{b}\hat{V}_kI_k$$

在此，$V_k=Z_kI_k$，$\hat{V}_k=Z_k\hat{I}_k$，其中 $Z_k=R$ 或 $j\omega L$ 或 $\frac{1}{j\omega C}$。进而

$$\sum_{k=3}^{b}V_k\hat{I}_k=\sum_{k=3}^{b}Z_kI_k\hat{I}_k$$

同样

$$\sum_{k=3}^{b}\hat{V}_kI_k=\sum_{k=3}^{b}Z_k\hat{I}_kI_k$$

二者相等，结果有

$$V_1\hat{I}_1+V_2\hat{I}_2=\hat{V}_1I_1+\hat{V}_2I_2$$

由图5.13

$$V_1=E_1=E_s,\quad V_2=0,\quad \hat{V}_1=0,\quad \hat{V}_2=\hat{E}_2=E_s$$

因此

$$E_s\hat{I}_1=E_sI_2$$

即

$$\hat{I}_1=I_2$$

5.4 电路分析中树和补树的作用

在以上各节中，图的树和补树(更一般为林和补林)的概念用于电路分析，并以公式的形式反复使用过。现在，简单归纳一下树和补树的作用。在无向图中所定义的图的秩和零度，在有向图中仍然适用。

图的秩： $r(G)=n-p$

图的零度：$n(G)=b-r(G)=b-n+p$

其中 b, n, ρ 分别表示图的支路数、节点数、连通片数。在表示电路电压的图中，所有支路电压都可用树支电压表示[式(5.24)、式(5.25)]，再有，相对于参考点的节点电压也决定于树支电压 [式(5.26)]。因而，$r(G)=n-1=$图的树支数$=$独立支路电压数$=$树支电压数$=$独立的节点电压数。($\rho\geqslant 2$ 时，将树换成林即可。)

另外，在表示电路电流的图中，据式(5.14)，树支电流可用补树的连支电流表示，因此，图的支路电流完全可用连支电流来确定[式(5.16)]。也就是说，由于基本回路是由补树的连支产生的，因此当补树的连支电流与所对应的基本回路电流数值相同时，树支电流可表示为基本回路的叠加。基本回路电流的个数为 $b-n+1$ (一般情况为 $b-n+\rho$)，因而图的零度 $n(G)=b-r(G)=b-n+1$ $=$独立的支路电流数$=$补树的连支电流数$=$独立的基本回路电流数(一般情况为独立的回路电流)。$\rho\geqslant 2$ 时，考虑补林即可。

5.5 节点电压法和回路电流法

分析网络时，若列写电路方程式，通常取节点电压为未知数，或取回路电流(或网孔电流：mesh current)为未知数，无论用哪种方法均能求解网络方程(network equations)。前者称为**节点(电压)分析法**(node analysis)，后者称**回路(电流)分析法**(loop analysis, mesh analysis)。

在本节中，学习分析基本电路。因此主要是处理独立电源和仅由 L、C、R 组成的线性无源网络。对于受控电源、放大器等包括有源元件的含源电路和其他非线性电路等，需要将本节的概念扩展，改变图的表示方法。但由于篇幅的关系，有关这些的图论的探讨只得割爱了*1。

*1 想详细学习者，可参看参考文献 14)。

[1] 电阻网络分析

首先分析由独立直流电源和电阻组成的电阻网络。为了统一地用图表示网络，通常设(独立)电压源与电阻串联起来，(独立)电流源与电阻并联着或者与串联着的电压源和电阻相并联。形式如图5.16(b)(c)(d)所示。如果电路不是这种连接关系，则可以利用图5.14所示的电压源的等效转移，或者图5.15的电流源的等效转移，将原电路变换成电压源与电阻串联，电流源与电阻并联的形式。图5.16(d)所示的是包含图(a)、图(b)、图(c)的一般情况。因为在图(d)中，$J_k=0$，$E_k=0$ 时成为图(a)；$J_k=0$ 时成为图(b)；$E_k=0$ 时得图(c)。关于电路的第 k 个电阻 R_k 的图上二节点 r、s 间的电压和电流分别为 $\tilde{v}_k$，$\tilde{i}_k$，若在有向边上可表示为图(e)，

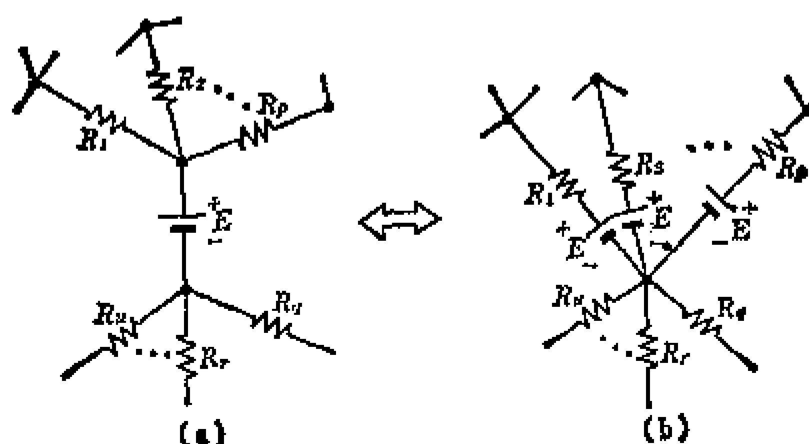


图5.14 电压源的等效转移

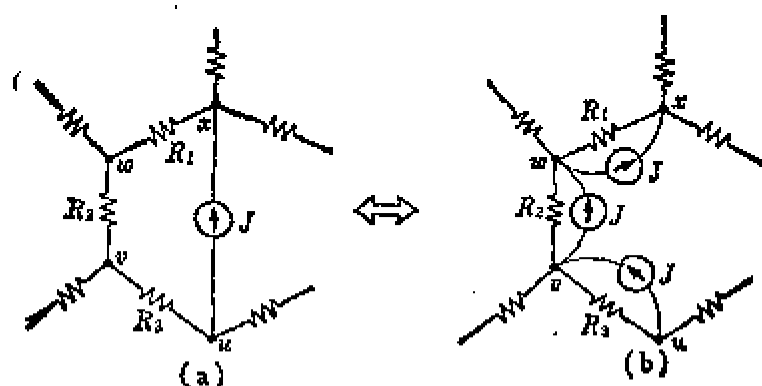


图5.15 电流源的等效转移

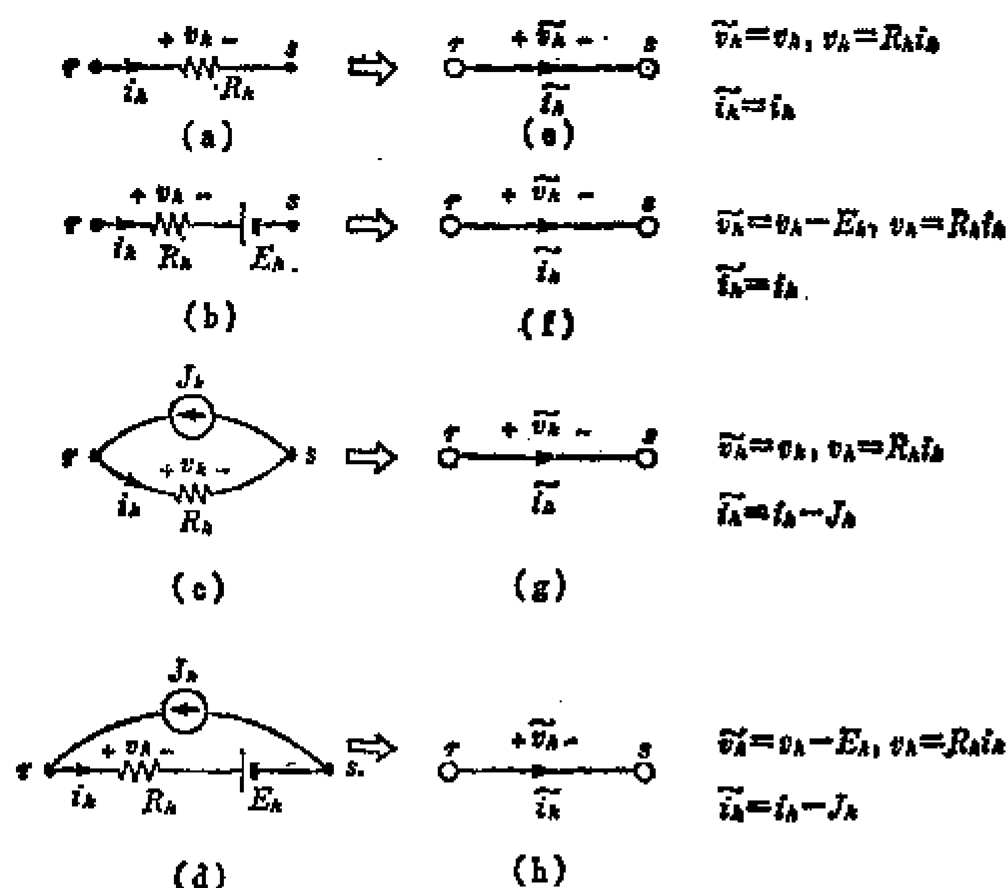


图 5.16 用图表示电阻和电源

图(f)，图(g)和图(h)。但要注意，v_k，i_k 表示 R_k 的电压和电流，r、s 之间电压 $\tilde{v}_k$ 和电流 $\tilde{i}_k$ 的方向依从 v_k，i_k 的方向。

[2] KCL 和 KVL 的系统化公式表示

设电阻网络是 b 个电阻 $R_k(k=1, 2,\cdots, b)$和电压源、电流源适当地混联在一起的，电源和电阻如图 5.16(d)那样一般连接，以电阻作为核心来考虑。有向图由 b 条有向支路组成。设该图的电压向量和电流向量分别为 $\tilde{\boldsymbol{V}}_e$，$\tilde{\boldsymbol{I}}_e$ 时

$$\tilde{\boldsymbol{V}}_e=\begin{bmatrix}\tilde{v}_1\\ \tilde{v}_2\\ \vdots\\ \tilde{v}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1-E_1\\ v_2-E_2\\ \vdots\\ v_b-E_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}E_1\\ E_2\\ \vdots\\ E_b\end{bmatrix}=\boldsymbol{V}_e-\boldsymbol{E}_e \qquad (5.38)$$

$$\tilde{\boldsymbol{I}}_e=\begin{bmatrix}\tilde{i}_1\\ \tilde{i}_2\\ \vdots\\ \tilde{i}_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_1-J_1\\ i_2-J_2\\ \vdots\\ i_b-J_b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ \vdots\\ i_b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}J_1\\ J_2\\ \vdots\\ J_b\end{bmatrix}=\boldsymbol{I}_e-\boldsymbol{J}_s \tag{5.39}$$

而 $\boldsymbol{V}_e,\boldsymbol{I}_e$ 为 b 个电阻上的电压和电流向量，$\boldsymbol{E}_s$和 $\boldsymbol{J}_s$ 表示电压源和电流源向量。因 KCL：$\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{I}}_e=\boldsymbol{0}$，KVL：$\boldsymbol{B}\tilde{\boldsymbol{V}}_e=\boldsymbol{0}$，利用式(5.38)、式(5.39)，则

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{I}}_e=\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_e-\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{0}\\ \text{即}\quad&\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_e=\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{J}\qquad(\text{KCL})\end{aligned}\right\} \tag{5.40}$$

上式左边表示从各节点流出的电流的总和，而$\boldsymbol{J}$ 的各元素表示由于电流源的作用而流入对应节点电流的总和。完全同样地，

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_e=\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_s=\boldsymbol{E}\qquad(\text{KVL}) \tag{5.41}$$

$\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_e$ 的各行是该行所表示的回路中所存在的电阻上的总电压降；另一方面，E 的对应元素，表示该回路中所存在的各电压源引起的电位升的总和。

图 5.17(a)为电阻网络的例子。若有向支路全部与流过 R_k $(k=1,2,3,4)$的电流 $i_k(k=1,2,3,4)$的方向一致，得图(b)的有向图。当取节点 3 为参考点时，图(b)的基底关联矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{matrix} \\ 1\\ 2\end{matrix}\begin{matrix}\tilde{i}_1 & \tilde{i}_2 & \tilde{i}_3 & \tilde{i}_4\\ \left[\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right. & \begin{matrix}1\\-1\end{matrix} & \begin{matrix}0\\1\end{matrix} & \left.\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right]\end{matrix} \tag{5.42}$$

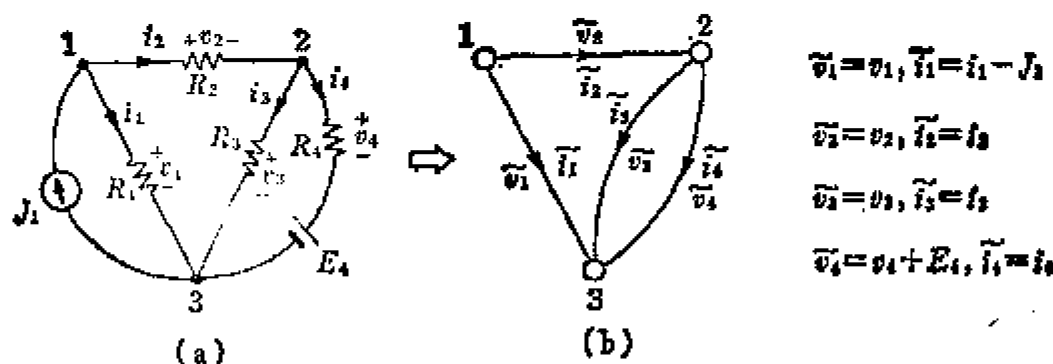


图5.17 (a) 电阻网络， (b) 分析该网络所用的有向图

当用式(5.40)时

$$\boldsymbol{AI_e}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{i}_1\\ \tilde{i}_2\\ \tilde{i}_3\\ \tilde{i}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1-J_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i_1\\ i_2\\ i_3\\ i_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{AI_e}-\boldsymbol{AJ_s}=0$$

所以

$$\boldsymbol{AI_e}=\begin{bmatrix}i_1+i_2\\ -i_2+i_3+i_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}J_1\\ 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{AJ_s}=\boldsymbol{J} \tag{5.43}$$

上式即表示节点1和节点2的KCL，即

$$\begin{aligned}i_1+i_2&=J_1\\ -i_2+i_3+i_4&=0\end{aligned} \tag{5.44}$$

另外，若在图(b)中，选独立回路，例如 C_1：$\tilde{v}_1\to\tilde{v}_2\to\tilde{v}_3$ 和 C_2：$\tilde{v}_3\to\tilde{v}_4$ 时，基底回路矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为下式：

$$\boldsymbol{B}=\begin{matrix} & \tilde{v}_1 & \tilde{v}_2 & \tilde{v}_3 & \tilde{v}_4\\ C_1 & -1 & 1 & 1 & 0\\ C_2 & 0 & 0 & -1 & 1\end{matrix} \tag{5.45}$$

因而，将 $\boldsymbol{V_e}=[v_1\ v_2\ v_3\ v_4]^t$，$\boldsymbol{E}^t=[0\ 0\ 0\ -E_4]^t$ 代入式(5.41)时，

$$\boldsymbol{BV_e}=\begin{bmatrix}-v_1+v_2+v_3\\ -v_3+v_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -E_4\end{bmatrix}=\boldsymbol{BE_s}=\boldsymbol{E} \tag{5.46}$$

即

$$\begin{aligned}-v_1+v_2+v_3&=0\\ -v_3+v_4&=-E_4\end{aligned} \tag{5.47}$$

[3] 欧姆定律的矩阵形式

今在所分析的电阻网络中，有 b 个电阻，欧姆定律成立。因而

> 欧姆定律：
>
> $$G_k v_k = i_k \qquad (k=1, 2, \cdots, b) \tag{5.48}$$
>
> $$R_k i_k = v_k \qquad (k=1, 2, \cdots, b) \tag{5.49}$$
>
> 式中 $G_k = \dfrac{1}{R_k}$

若用矩阵形式表示欧姆定律，则为

$$\begin{bmatrix} G_1 & & & 0 \\ & G_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & G_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_b \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

设左边由对角线元素所组成的矩阵为 $\boldsymbol{G}_e$，则上式可簡明地表示为

$$\boldsymbol{G}_e \boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{I}_e \tag{5.51}$$

式(5.49)可完全同样地写成：

$$\begin{bmatrix} R_1 & & & 0 \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & R_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_b \end{bmatrix} \tag{5.52}$$

用矩阵形式表示为：

$$\boldsymbol{R}_e \boldsymbol{I}_e = \boldsymbol{V}_e \tag{5.53}$$

[4] 节点电压法

这个方法是设各节点(通常设有向图的节点数为 n)相对于参考点的电压为未知数，进而求解电路的方法。首先由式(5.51)(欧姆定律)和式(5.40)(KCL)

$$AG_eV_e = AJ_s = J \tag{5.54}$$

将式(5.38)的 $V_e = \tilde{V}_e + E_s$ 代入上式，得

$$AG_e\tilde{V}_e = AJ_s - AG_eE_s \tag{5.55}$$

关于各支路的电压和节点的电压，有式(5.27)所表示的关系：

$$\tilde{V}_e = A^tV_n \tag{5.56}$$

因而结果得到如下的节点方程(node equations)

$$(AG_eA^t)V_n = AJ_s - AG_eE_s \tag{5.57}$$

当 $|AG_eA^t| \neq 0$ 时，用下式求各节点相对于参考点的电压

$$V_n = (AG_eA^t)^{-1}[AJ_s - AG_eE_s] \tag{5.58}$$

电阻网络的有向图有 n 个节点，G_e 为对角线矩阵，因此 AG_eA^t 是 $(n-1)$ 阶正则的对称方阵。此矩阵 $Y_n = AG_eA^t$ 称作节点导纳矩阵*1 (node admittance matrix)。AJ_s 和 AG_eE_s 分别为 $(n-1)$ 阶的取决于原电流源的电激流向量和取决于电压源的等效电激流向量。据式(5.58)可求得各节点电压 $v_{in}(i=1, 2, \cdots, n-1)$，然后用式(5.56)，可求得图的支路电压 $\tilde{v}_k(k=1, 2, \cdots, b)$。最后，由式(5.58)能计算 $v_k = \tilde{v}_k + E_k(k=1, 2, \cdots, b)$，同时从 $v_k = R_ki_k$ $(k=1, 2, \cdots, b)$也可求流过电阻 R_k 的电流 $i_k(k=1, \cdots, b)$。在此，应特别注意的要点，是式(5.58)中节点导纳矩阵的逆矩阵的计算。$(AG_eA^t)^{-1}$ 的代数计算方法是很繁琐的。如后所述，图论中有一种用单纯的拓扑公式求该值的简单方法。

[5] 回路电流法

这个方法是将独立的回路电流作为未知数求解电路的方法。与前相同地，试分析包含 b 个电阻和电流的电路。因而将电路变

---

*1 用相量法分析交流稳态电路时，与 G_e 对应的矩阵成为导纳矩阵。因此通常如此命名。

换为图5.16的有向图。通常设节点数为 n，独立回路则为 $(b-n+1)$ 个，对应于这些回路的基底回路矩阵用 $\boldsymbol{B}$ 表示。

首先说明由基底回路电流求解电路的方法。

据 KVL 和欧姆定律，即据式(5.41)和式(5.53)，

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{I}_e=\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_s=\boldsymbol{E} \tag{5.59}$$

由式(5.39)，得 $\boldsymbol{I}_e=\tilde{\boldsymbol{I}}_e+\boldsymbol{J}_s$，代入上式得：

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_e\tilde{\boldsymbol{I}}_e=\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_s-\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{J}_s \tag{5.60}$$

由式(5.18)，有向图的全部支路电流，可以用基本回路电流表示。因为

$$\tilde{\boldsymbol{I}}_e=\boldsymbol{B}_f^t\boldsymbol{I}_l \tag{5.61}$$

据式(5.60)和式(5.61)，回路方程(loop equations)为

$$(\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{B}_f^t)\boldsymbol{I}_l=\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{E}_s-\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{J}_s \tag{5.62}$$

因而，所求的基本回路电流向量为

$$\boldsymbol{I}_l=(\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{B}_f^t)^{-1}[\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{E}_s-\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{J}_s] \tag{5.63}$$

$\boldsymbol{Z}_l=\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{B}_f^t$ 称为(基本)回路阻抗矩阵(loop impedance matrix)。若是电阻网络，则为 $(b-n+1)$ 阶对称方阵。而 $\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{E}_s$ 为取决于原有电压源的 $(n-b+1)$ 阶电动势向量，同样，$\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{J}_s$ 表示取决于原有电流源的 $(n-b+1)$ 阶的等效电动势向量。在回路电流法中，不仅限于设基本回路电流为未知数，设一般的独立回路电流[通常(平面电路中)称为网孔电流(mesh current)]为未知数也可。因而若使用对应的基底回路矩阵 $\boldsymbol{B}$，对式(5.63)设回路电流向量 $\boldsymbol{I}_l$。则

$$\boldsymbol{I}_l=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{B}^t)^{-1}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{E}_s-\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{J}_s] \tag{5.64}$$

回路电流可求得。有向图各支路的电流 $\tilde{\boldsymbol{I}}_e$ 可据式(5.61)由 $\boldsymbol{I}_l$ 求出。从 $\boldsymbol{I}_e=\tilde{\boldsymbol{I}}_e+\boldsymbol{J}_s$ 能计算出流过电阻的电流。根据欧姆定律，从 $\boldsymbol{V}_e=\boldsymbol{Z}_e\boldsymbol{I}_e$ 最终可以求出电阻两端的电压。与 $\boldsymbol{Y}_n^{-1}$ 一样，在本章最后将附带说明不用代数计算而用拓扑求 $(\boldsymbol{B}_f\boldsymbol{R}_e\boldsymbol{R}_f^t)^{-1}$ 的方法。

[6] *RLC* 电路的稳态分析

同一频率的电压源、电流源及电阻(R)、电感(L)、电容(C)所组成的电网络的稳态分析，完全可以像对待电阻网络那样。将公式中电导用导纳置换，电阻用阻抗置换即可。当然，电压和电流值用复数表示。

试解一实例。该题为，在图 5.18 的电路中，求策动点阻抗 $Z(j\omega)$。因为 $Z(j\omega)=V_{13}/J_1$，若以节点 3 作为参考点用节点电压法求 V_{13} 即可。首先确定电路的图如图(c)所示。

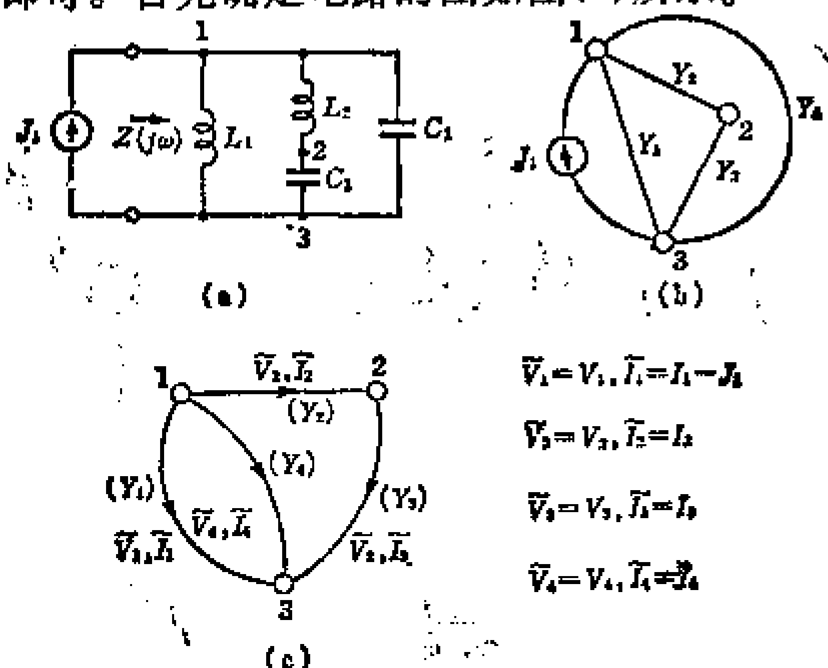


图 5.18　电抗电路的分析举例

$$
\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{A}= \end{array}
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

因而，节点导纳矩阵如下式：

$$
\boldsymbol{AY_bA^t}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} Y_1 & & & 0 \\ & Y_2 & & \\ & & Y_3 & \\ 0 & & & Y_4 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$=\begin{bmatrix} Y_1+Y_2+Y_4 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2+Y_3 \end{bmatrix}$$

利用式(5.57)，考虑到该电路中没有电压源，故

$$(AY_eA^t)\begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \end{bmatrix} = AJ_e = A\begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} Y_1+Y_2+Y_4 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2+Y_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此

$$V_{13} = \frac{\begin{vmatrix} J_1 & -Y_2 \\ 0 & Y_2+Y_3 \end{vmatrix}}{|AY_eA^t|} = \frac{(Y_2+Y_3)J_1}{Y_1Y_2+Y_1Y_3+Y_2Y_3+Y_2Y_4+Y_3Y_4}$$

将 $Y_1=1/j\omega L_1$，$Y_2=1/j\omega L_2$，$Y_3=j\omega C_2$，$Y_4=j\omega C_1$ 代入，得

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= V_{13}/J_1 \\ &= \frac{1-\omega^2L_2C_2}{j\omega L_2\left(\frac{C_2}{L_1}+\frac{C_2}{L_2}+\frac{C_1}{L_2}-\frac{1}{\omega^2L_1L_2}-\omega^2C_1C_2\right)} \\ &= jX \end{aligned}$$

因此可知，图示无损耗的 LC 电路的策动点输入阻抗是纯电抗。

5.6 电路分析中的拓扑公式

在上节中，为了统一地分析电路，叙述了从图求联立方程式的方法。本节不用克莱姆法则*1 计算联立方程的方法求解，而导出

---

*1 参阅附录。

从图的树和补树直接求系数矩阵的行列式及其余因子的公式。这样的从图直接求解的公式通常称作**拓扑公式**（topological formula）。

在节点电压法中，设各节点相对于参考点的电位为未知数，对于 RLC 电路由式(5.57)得到$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^t)\boldsymbol{V}_n=\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}_s-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{E}_s$的联立方程式。首先，从图按下述方法求节点导纳矩阵$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^t)$。"$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^t$的第$k(1\leqslant k\leqslant n-1)$个对角线元素[即$(k,\ k)$元素]即为连接节点$k$的全部(支路)的导纳的总和，其$(k,\ l)$元素是节点$k$和节点$l$间直接连接的全部(支路)的导纳的总和冠以负号。"因其证明较容易，留作习题。例如在上节最后的例题(参看图 5.18) 中，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^t$的元素(1,1)是连接在节点 1 的导纳的总和$(Y_1+Y_2+Y_4)$，元素(1,2)是节点 1 和节点 2 之间直接连接的导纳的总和Y_2冠以负号，为$-Y_2$。

[$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^t|$与树的关系]

在式(5.58)中求$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_e\boldsymbol{A}^t)^{-1}$的问题，一般为求$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^t)^{-1}$的问题。它归结为计算$\Delta=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^t|$和$\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^t$的余因子$\Delta_{ij}(1\leqslant i,\ j\leqslant n-1)$的问题(参看附录)。前曾指出，$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t|$为图中树的总数。而$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^t|$的展开式和图中的树存在如下的对应关系。首先，给出一个定义，所谓表示电路的图的**树导纳积**(tree-admittance product)，就是组成树的各个支路的导纳全部相乘的结果。这时得到，节点导纳矩阵的行列式就是树导纳积的总和这个公式。即

$$\text{节点导纳矩阵的行列式}\ \Delta=|\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^t|=\sum\text{树导纳积} \qquad (5.65)$$

我们再引用上节的例题。图 5.18(c) 的树共有$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t|=5$个，它们如图 5.19 所示。图(a)的树导纳积为Y_1Y_2，其余类推。若计算树导纳积的总和，不必直接展开行列式，由图可得

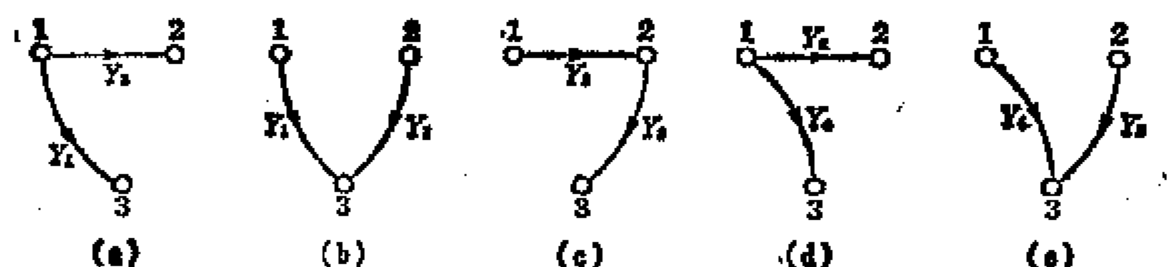


图 5.19　图5.18(c)的树

$$|AY_eA^t| = \begin{vmatrix} Y_1+Y_2+Y_4 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2+Y_3 \end{vmatrix}$$

$$= Y_1Y_2 + Y_1Y_3 + Y_2Y_3 + Y_2Y_4 + Y_3Y_4$$

另外，式(5.57)的解为

$$V_n = \begin{bmatrix} V_{1n} \\ V_{2n} \\ \vdots \\ V_{n-1,n} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n-1,1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Delta_{1,n-1} & \Delta_{2,n-1} & \cdots & \Delta_{n-1,n-1} \end{bmatrix}$$

$$\times [AJ_s - AY_eE_s] \quad (5.66)$$

式中，$\Delta = |AY_eA^t|$，Δ_{ij} 为 AY_eA^t 的元素(i, j)的余因子。

Δ_{ij} 为从 AY_eA^t 中除去 i 行和 j 列所形成的子行列式乘以 $(-1)^{i+j}$ 所得的值，该子行列式与从 AY_e 中除去 i 行的矩阵乘以从 A^t 中除去 j 列的矩阵所得矩阵的行列式相等。利用此结果，对应于余因子的拓扑公式可由下图的二树*1给出*2。

$$\left.\begin{aligned} \Delta_{ii} &= \text{二树}(T_{2i,n})\text{导纳积的总和} \\ \Delta_{ij} &= \text{二树}(T_{2ij,n})\text{导纳积的总和} \end{aligned}\right\} \quad (5.67)$$

图 5.20 所示的是二树的例子。

---

*1　详见参考文献14)。

*2　设图 G 为有 b 条支路和 n 个节点的连通图 ($n \geqslant 2$)。当 G 的子图 T_2 有 n 个节点和 $n-2$ 条支路且不含回路时，T_2 是 G 的二树(2-tree)。这时已知 T_2 是由二个连通片所组成，在 G 的二树中，(1)节点 i 和参考点 n 分别包含在不同连通片中的二树表示为 $T_{2i,n}$，(2)节点 i 和 j 包含在同一片中，参考点 n 包含在另外片中的二树表示为 $T_{2ij,n}$。

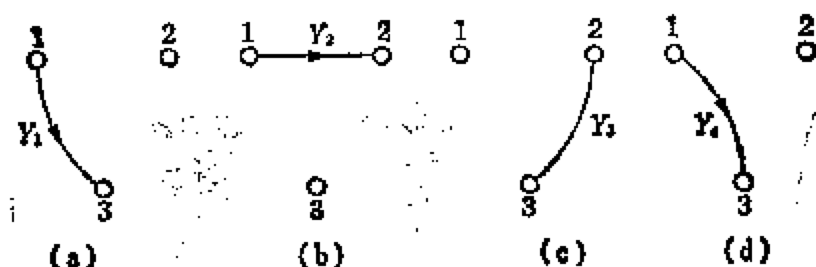


图 5.20　图 5.18(c)的二树

在上一节有关图 5.16 的问题中，由式(5.65)

$$\boldsymbol{V}_n=\begin{bmatrix}V_{13}\\V_{23}\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\Delta_{11}&\Delta_{21}\\\Delta_{12}&\Delta_{22}\end{bmatrix}[AJ_s]=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}\Delta_{11}&\Delta_{21}\\\Delta_{12}&\Delta_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}J_1\\0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}J_1&\Delta_{11}\\J_1&\Delta_{12}\end{bmatrix}$$

然而，$\Delta_{11}=\sum$二树$(T_{21,3})$的导纳积，图 5.18 中的 $T_{21,3}$ 是图 5.20(b)和(c)两个，这时，$\Delta_{11}=Y_2+Y_3$。另一方面，因为 $\Delta_{12}=\sum$二树$(T_{212,3})$的导纳积，求得$(T_{212,3})$只与图 5.20(b)相同，因而 $\Delta_{12}=Y_2$。

若应用以上的拓扑公式，一端对(单口)的策动点导纳，三端和四端(二端对，双口)的传递函数等所谓网络函数可以用拓扑方法求得。而且，由于引入了图的三树(3-tree)，使公式可能简化和发展。

分析回路电流时也能得到同样的公式。例如，由补树阻抗的积(co-tree impedance product)的总和可以求得基本回路阻抗矩阵的行列式。而且，对应于基本回路矩阵的余因子的是补二树(co-2-tree)，等等。对于节点电压法，可以得到对偶公式。

习　题

［1］ 在图 5.21 的电路中，设树为图(b)的$\{v_1,v_4,v_5\}$时，计算式(5.16)、式(5.24)和式(5.27)。

［2］ 图 5.22 的N是只由$(b-2)$个电阻组成的不含独立电源的电路。

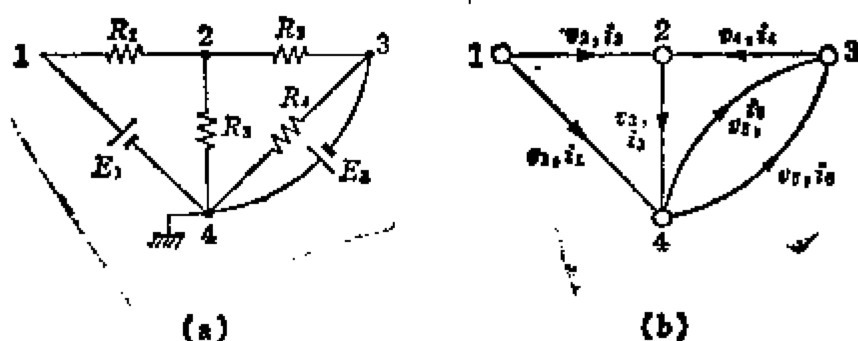


图 5.21

图 5.22

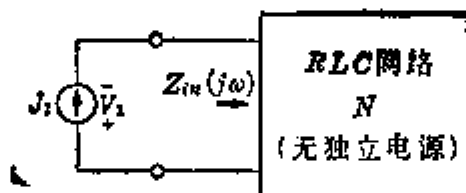


图 5.23

改变外接电源大小和 R_2，测量电压和电流，得到如下数据。$R_2=2\Omega$ 时，$v_1=6V$，$i_1=2A$，$v_2=2V$；$\hat{R}_2=1\Omega$ 时，$\hat{v}_1=3V$，$\hat{i}_1=1.5A$；求 $\hat{v}_2$，$\hat{i}_2$。

［3］ 利用戴勒亨定理说明图 5.23 所示的 RLC 电路的（策动点）输入阻抗可用下式表示（文献 10）：

$$Z_{in}(j\omega)=\frac{P_{dis}+j2\omega(E_m-E_e)}{|J_1|^2}$$

其中，J_1 是频率为 ω 的电流源的有效值电流向量。P_{dis} 是电阻消耗的平均功率。E_m 和 E_e 分别表示N中的电感和电容中储存的平均磁能和平均电能。（该式包含 RLC 电路的重要概念，可用于网络综合理论等。）

［4］ 在 RLC 和电流源所组成的电路中，试导出阻抗元件值有微小变化时，各阻抗元件的电压变化的近似公式。设电流源的值不变［参考文献 18］。

［5］ 计算图 5.24 的电路中各节点相对于节点 4 的电压。

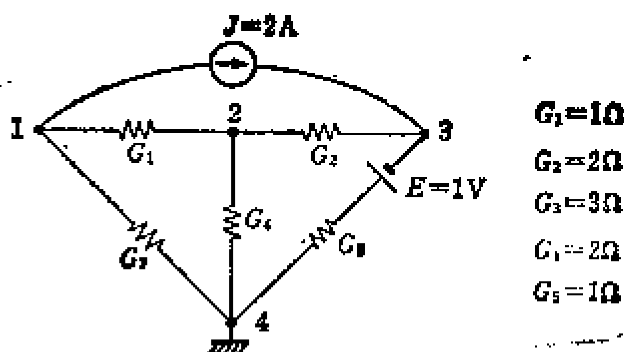


图 5.24

［6］ 在图5.25中，选其树为图(b)所示，试求出回路电流方程式[式(5.62)]。

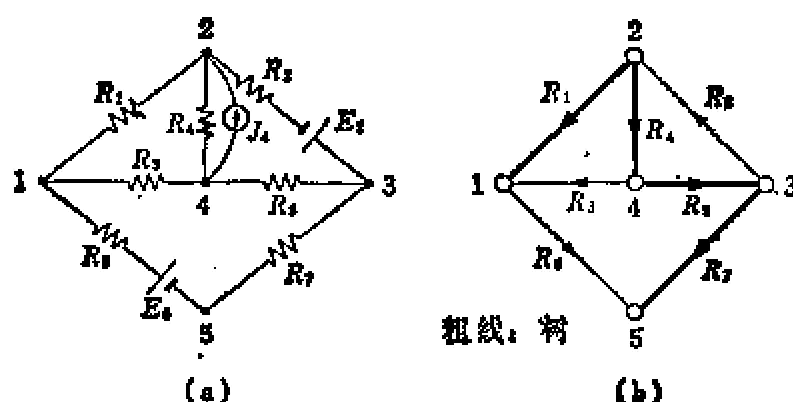


图5.25

［7］ 证明$|AY_bA^t|=\sum$树导纳积。

参考文献

1) Percival: Solution of Passive Electrical Networks by Means of Mathematical Trees, Proc. IEE (London), Part III, 100 (1953), p.143—150

2) W. S. Percival: Graphs of Active Networks, Proc. IEE (London), 102 (1955), p. 270—278

3) Y. Okada: On Node and Mesh Determinants, Proc. IRE, 43 (1955), p. 1527

4) W. Mayeda and S. Seshu: Topological Formulas for Network Functions, Engr. Experimental Station Bulletin, No. 446, University of Illinois(1957)

5) Guillemin 著・山田他訳: 回路網基礎學，近代科學社 (1959)

6) S. Seshu and M. B. Reed:Linear Graphs and Electrical Networks, Addison-Wesley (1961)

7) W. H. Kim and R. T. Chien: Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia University Press (1962)

8) 小野寺・大類: 電気回路網基礎理論，學獻社 (1967)

9) Shu-Park Chan: Introductory Topological Analysis of Electrical Networks, Holt Rinehart & Winston. Inc. (1969)

10) C. A. Desoer & E. S. Kuh: Basic Circuit Theory, McGraw-Hill (1969)
11) R. A. Rohrer: Circuit Theory; An Introduction to the State Variable Approach, McGraw-Hill, Kogakusha [International Student Edition (1970)]
12) L. P. Huelsman: Circuits, Matrices, and Linear Vector Spaces, McGraw-Hill (1963)
13) R. L. Ramey & E. J. White: Matrices & Computers in Electronic Circuit Analysis. McGraw-Hill, Kogakusha (1971)
14) W. Mayeda: Graph Theory, Wiley-Interscience (1972)
15) D. A. Calahan: Computer Aided Network Design, McGraw-Hill (1972)
16) 渡辺: 線形回路理論，昭晃堂(1971)
17) W. K. Chen: Applied Graph Theory; graphs and electrical networks, North-Holland (2nd revised edition) (1976)
18) C. A. Desoer: Teaching Adjoint Networks to Juniors, IEEE Trans. on Education, Vol. E-16, No. 1 (1973)
19) 電子回路 の CAD，電子通信學會(1973)
20) B. D. H. Tellegen: A General Network Theorem with Applications, Philips Res. Rep., 7 (1952), p. 259—269
21) 平山・大附: ディジタル計算機による位相幾何學的回路網解析，電子通信學會誌，48 (1965), p. 424—430
22) 岸・梶谷: リニアグラフにおける最大距離にある二つの木，電子通信學會誌，51-A, 48 (1968), p. 196—203
23) 大附・石崎・渡辺: 回路網解析と位相幾何學的自由度，電子通信學會誌，51-A(1968), p. 238—245
24) 梶谷・山田: LCR 回路網の回路行列式のグラフ理論的考察，電子通信學會誌，53-A (1970), p. 507—514
25) 有吉・白川・尾崎: Sparse アドミタンス行列の計算手順に関するグラフ理論的一手法，電子通信學會誌，53-A (1970), p. 612—619

第六章　连 接 矩 阵

【要点】　已经学过用割集矩阵或回路矩阵来表示图的方法，现在要讲述作为使用方阵的图的表示方法之一，即利用度高的连接矩阵。对于这种连接矩阵来说，由于从对应的图可求得它的行列式，所以它在下一章的信号流图中起着重要的作用，同时它也是分析开关网络所使用的矩阵。

6.1　连 接 矩 阵

当方阵 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$ 的行和列都代表图的顶点，元素 c_{ij} 代表从顶点 i 到顶点 j 的边时，$\boldsymbol{C}$ 就称做**连接矩阵**(connection matrix)。倘若从顶点 i 到顶点 j 的所联接的边有好几条时，通常是把它们的和作为 c_{ij}。例如，图 6.1 的图的连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{C}=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\ \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0\\ 0 & c & d & 0\\ b+e & 0 & 0 & g\\ h & 0 & f & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

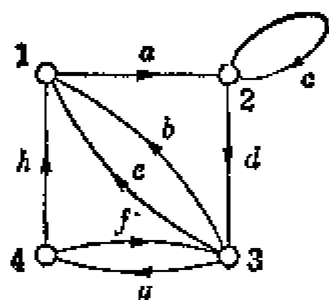


图 6.1　图 G

并联边 b 和 e 是从顶点 3 联接到顶点 1，因此 $b+e$ 就成为 $\boldsymbol{C}$ 的(3,1)元素。

在图为无向图的情况下，顶点 i、j 间所联接的边就表示对应的连接矩阵的元素 c_{ij} 和 c_{ji}。因此，连接矩阵成为对称矩阵。例如，图 6.2 中无向图 G 的连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为

$$
\boldsymbol{C}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\\left[\begin{array}{cccc}0&a&0&f\\a&b&c&d\\0&c&0&e\\f&d&e&0\end{array}\right]\end{array}
$$

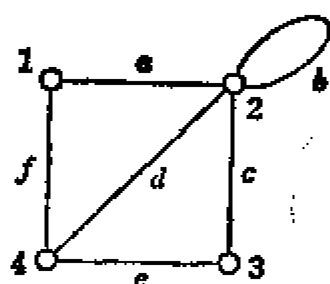


图 6.2 无向图 G

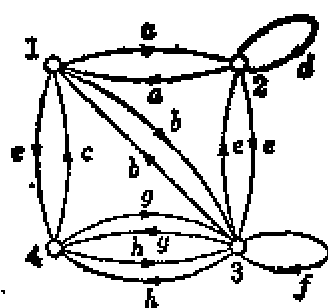
当连接矩阵已经给定时，欲求其图，只要使行和列与顶点对应，把全部非零元素 c_{ij} 当作从顶点 i 到顶点 j 的边就行了。在连接矩阵为对称矩阵的情况下，也能够作出其对应的无向图。例如，连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 给定为下列形式时，

$$
\boldsymbol{C}=\left[\begin{array}{cccc}0&a&b&c\\a&d&e&0\\b&e&f&g+h\\c&0&g+h&0\end{array}\right]
$$

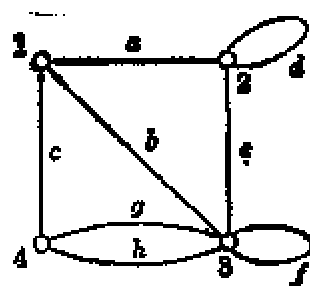
若在行和列上加上顶点名称，

$$
\boldsymbol{C}=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\\left[\begin{array}{cccc}0&a&b&c\\a&d&e&0\\b&e&f&g+h\\c&0&g+h&0\end{array}\right]\end{array}
$$

由此便可得出像图 6.3(a)那样的有向图。又由于上述矩阵是对称矩阵，所以也容易作出像图 6.3(b)那样的无向图。



(a) 有向图



(b) 无向图

图 6.3 有向图与无向图

[1] 连接矩阵的 k 次乘方

现在研究一下如何表示将连接矩阵平方后所得的矩阵。若设 $\boldsymbol{C}=[c_{ij}]$，并设 $\boldsymbol{C}^2=\boldsymbol{D}$，则 $\boldsymbol{D}$ 的(i, j)元素 d_{ij} 为

$$d_{ij}=\sum_{k=1}^{n}c_{ik}c_{kj} \tag{6.1}$$

c_{ik} 是联接从顶点 i 到顶点 k 的边，c_{kj} 是联接从顶点 k 到顶点 j 的边，所以 $c_{ik}c_{kj}$ 就是表示从顶点 i 通过边 c_{ik} 到达顶点 k，接着从顶点 k 通过边 c_{kj} 走到顶点 j。按照式(6.1)，d_{ij} 表示从顶点 i 出发，沿着边的方向顺次走下去、经过两个边能够到达顶点 j 的边的组合。虽然写的是两条边，不过同一条边通过两次也可以。但这是在顶点 i 上有自环的情况，到达的顶点仍是 i。

作为一个例子，图 6.1 中图 G 的连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的平方为

$$\boldsymbol{C}^2=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\\left[\begin{array}{cccc}0 & ac & ad & 0\\d(b+e) & c^2 & cd & dg\\gh & a(b+e) & fg & 0\\f(b+e) & ah & 0 & fg\end{array}\right]\end{array}$$

$\boldsymbol{C}^2$ 的(1,2)元素是 ac。这就是从顶点 1 顺着边 a 走向顶点 2，再从顶点 2 顺着自环 c 到顶点 2 时，所走过的边就是 a 与 c 的乘积。除此之外，无法再沿两个边从顶点 1 走到顶点 2，所以只有 ac 成为(1,2)的元素。对于(2,1)元素，当从顶点 2 顺着边 d 走，然后再顺着边 b 到达顶点 1 时，则为 db；当从顶点 2 顺着边 d 走，然后再顺着边 e 到达顶点 1 时，则为 de。此外，不可能再沿两条边从顶点 2 到达顶点 1，所以，结果就成为 $db+de$。

对于连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的 k 次乘方，可以说也是同样的。现在设 $\boldsymbol{C}^k=\boldsymbol{E}$。若把 $\boldsymbol{E}$ 的(i, j)元素 e_{ij} 表示成$\sum f_p$ 的形式，那么，f_p 就

是从顶点 i 顺着边的方向走过 k 个边到达顶点 j 时所通过的边的乘积。图 6.1 的图 G 的连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的 3 次方为

$$
\boldsymbol{C}^3=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc} ad(b+e) & ac^3 & acd & adg \\ cd(b+e)+dgh & c^3+ad(b+e) & c^2d+dgf & cdg \\ gf(b+e) & ac(b+e)+agh & ad(b+e) & fg^2 \\ fgh & ach+af(b+e) & agh+gf^2 & 0 \end{array}\right]\end{array}
$$

(1,1) 元素成为 $adb+ade$。这个元素是这样形成的：从顶点 1 通过边 a、d，最后通过边 b 并走到顶点 1，因此有 adb 项；同样，从顶点 1 出发，顺着边 a、d 前进，最后通过边 e 并到达顶点 1，所以 ade 项也属于(1,1)元素。除此以外，无法再通过三条边从顶点 1 出发并回到原来的顶点 1，所以 $\boldsymbol{C}^3$ 的(1,1)元素仅由两项组成。对此，只要看一下图 6.1 的图 G 就明白这是正确的。对于(1，2)元素，从顶点 1 顺着边 a 走，到达顶点 2 之后再顺着自环 c 绕行两次并停止于顶点 2，便得出 ac^3。

［2］连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{U}$ 之和的 $(n-1)$ 次乘方*1：$(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})^{n-1}$

这里，我们来考察一下 $\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{C}^k$。设 $\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{C}^k=\boldsymbol{F}$①。若将矩阵 $\boldsymbol{F}$ 的(i,j) 元素表示为 $\sum g_p$，则 g_p 便为从顶点 i 按照边的方向顺着边一条一条地走下去、到达顶点 j 时所通过的边的乘积。但是，所通过的边的数目(也包括自环)小于或等于 k。例如，若用图 6.1 中图 G 的连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 求 $\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{C}^k=\boldsymbol{F}$，则有

---

*1 n 为图 G 的顶点数。

① 原文误为 $\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{C}^k=\boldsymbol{F}$。——译者

$$
\boldsymbol{F}=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ \\ 3\\ \\ 4\\ \\ \end{array}
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4\\
ad(b+e) & a+ac+ac^2 & ad+acd & adg\\
d(b+e)+ & c+c^2+c^3+ & d+cd+c^2d+ & dg+cdg\\
cd(b+e)+dgh & ad(b+e) & dgf & \\
b+e+gh+ & a(b+e)+ & gf+ad(b+e) & g+fg^2\\
gf(b+e) & ac(b+e)+agh & & \\
h+f(b+e)+ & ah+ach+ & f+adh+gf^2 & fg\\
fgh & af(b+e) & &
\end{array}
$$

在这里我们应用布尔代数将各元素整理一下。根据 $x+xy=x$，上述 $\boldsymbol{F}$ 就成为

$$
\boldsymbol{F}=\begin{array}{c}\\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\end{array}
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4\\
ad(b+e) & a & ad & adg\\
d(b+e)+dgh & c+ad(b+e) & d & dg\\
b+e+gh & a(b+e)+agh & gf+ad(b+e) & g\\
h+f(b+e) & ah+af(b+e) & f+adh & fg
\end{array}
$$

在这个 $\boldsymbol{F}$ 的 $(i,\ j)$ 元素中，当 $i\neq j$ 时，就成为从顶点 i 到顶点 j 的所有顺向(directed)路径的乘积之和 [*1]。以使用单位矩阵 $\boldsymbol{U}$ 而作成的 $(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})^{n-1}$ 来代替 $\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{C}^k$ 也得出同样的结果。

6.2 连接矩阵的行列式

将连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行列式展开时，非零项就分别对应于一种特殊的子图。$\boldsymbol{C}$ 的行列式可写成

$$
|\boldsymbol{C}|=\sum(\operatorname{sgn} P)c_{1j_1}c_{2j_2}\cdots c_{nj_n} \tag{6.2}
$$

式中，$P=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$ 是置换，$(\operatorname{sgn} P)$ 在 P 是偶置换的情况下为 1，在奇置换的情况下为 -1。例如

---

*1 路径中所有边的方向都和路径的方向一致，此路径就叫做顺向路径。

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = \left[\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] c_{11}c_{22} + \left[\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\right] c_{12}c_{21}$$

由于$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$是偶置换，所以 $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$是 1，而$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$是奇置换，所以 $\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$是 −1。故得出下列形式的算式：

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

这里让我们对置换的问题稍作些研究。从$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}$的第一列$\begin{pmatrix} 1 \\ j_1 \end{pmatrix}$开始，若接着取 j_1 位于第一行的列为$\begin{pmatrix} j_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$，再取 k_2 位于第一行的列为$\begin{pmatrix} k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$，如此继续下去，则最后所取的列的第二行就为1。若把它们归总起来，便得出$\begin{pmatrix} 1 & j_1 & k_2 & \cdots & k_p \\ j_1 & k_2 & k_3 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$。这就叫做**循环置换**。如果把其余所有的置换也都用同样方法不断取出循环置换，最后便能够把给定的置换$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j \end{pmatrix}$表示为循环置换的集合。例如，

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

可以分解成为循环置换$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$和$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$。将此表示如下：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

在这里再考察一下$(\operatorname{sgn} P)$。P 的第二行经过m个互相置换后变成与第一行相同时，便得$(\operatorname{sgn} P) = (-1)^m$。如在上例中，若将第二行的 1 与 3 互换，第二行就成为(1 6 3 4 2 5)；然后若再

将 2 与 6 互换，则成为(1 2 3 4 6 5)；最后将 6 与 5 互换而成为(1 2 3 4 5 6)。至此，由于和第一行相同，所以得到$(\mathrm{sgn}\ P)=(-1)^3=-1$。这个 P 就成为三个循环置换的积。然而这个循环置换与$(\mathrm{sgn}\ P)$的关系如何？

由于循环置换成为$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & \cdots & i_k \\ i_2 & i_3 & \cdots & i_k & i_1 \end{pmatrix}$的形式，所以如果把第二行的最后一个元素($i_1$)与其左邻的元素($i_k$)互换，然后再把它与下一个左邻元素互换，这样不断地依次互换下去，结果这个第二行就与第一行相同。例如，把$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$的第二行中 2 与 5 互换，便成为$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$；然后若把 2 与 6 互换，便成为$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 5 \end{pmatrix}$。假定循环置换 P_c 是由 k 个列形成的，根据上述理由，经过$(k-1)$次的互换后第二行与第一行相同，那么$(\mathrm{sgn}\ P_c)$就是$(-1)^{k-1}$。再者，象上例一样，如果把循环置换 P 用 P_1, P_2, …, P_t 的积来表示，则此$(\mathrm{sgn}\ P)$为

$$(\mathrm{sgn}\ P)=(\mathrm{sgn}\ P_1)(\mathrm{sgn} P_2)\cdots(\mathrm{sgn}\ P_t)$$

这里，若设各个置换 P_i 的列数为 k_i，则

$$(\mathrm{sgn}\ P)=(-1)^{k_1-1}(-1)^{k_2-1}\cdots(-1)^{k_t-1}$$
$$=(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_t}(-1)^t$$

然而，由于 $k_1+k_2+\cdots+k_t$ 是 P 的列数 n，所以

$$(\mathrm{sgn}\ P)=(-1)^n(-1)^t$$

请注意，这个 t 是循环置换的个数。在上例中，

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

因为 $n=6$, $t=3$，所以有

$$(\mathrm{sgn}\ P)=(-1)^6(-1)^3=-1$$

若将此置换应用于连接矩阵的行列式，便将得出满意的结果。

[1] 置换与回路的关系

将式(6.2)所表示的连接矩阵行列式的一项 $(\mathrm{sgn}\ P)\ c_{1j_1}c_{2j_2}\cdots c_{nj_n}$ 中的 $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$ 用循环置换表示为 $P=P_1P_2\cdots P_t$。若设其中的一个循环置换为 $P_v=\begin{pmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & \cdots & v_m\\ v_2 & v_3 & \cdots & v_m & v_1\end{pmatrix}$，则这个置换表示在 $c_{1j_1}c_{2j_2}\cdots c_{nj_n}$ 中存在着 $c_{v_1v_2}c_{v_2v_3}\cdots c_{v_mv_1}$。由于连接矩阵的 (r, s) 元素 c_{rs} 就是联接着从顶点 r 至顶点 s 的边 c_{rs}，所以，$c_{v_1v_2}c_{v_2v_3}\cdots c_{v_mv_1}$ 就是从顶点 v_1 出发，经过边 $c_{v_1v_2}$ 到顶点 v_2，再从 v_2 经过边 $c_{v_2v_3}$ 到顶点 v_3，如此顺着边的方向一条接一条地走下去，并返回到最初的顶点 v_1 所通过的这样一些边的集合。这种边的集合就成为一个"顺向回路"*1 (directed loop)。因而也可以说，对于任一循环置换，$P_1,P_2,\cdots,P_t$ 是 t 个顺向回路。而且，以 P_v 所代表的顺向回路与以 P_w 所代表的 P 中其他顺向回路不能有共同的顶点。因为 P_v 与 P_w 都是 P 的循环置换，所以 P_v 与 P_w 的元素互不相同。而 P_v 与 P_w 的元素由各自的顺向回路的顶点形成，所以这些顺向回路不可能有公共顶点。不仅如此，由于 P 的元素对应于图的全部顶点，所以任一顶点都包含在由 $P_1,P_2,\cdots, P_t$ 所代表的顺向回路的某一个回路中。这样的顺向回路的集合就叫做全顶点循环*2。简言之，"全顶点循环就是没有公共顶点、但包括所有顶点的顺向回路的集合"。

由于 $(\mathrm{sgn}\ P)$ 为 $(-1)^n(-1)^t$，其中 t 是全顶点循环的顺向回路数，所以在一般情况下，$(\mathrm{sgn}\ P)\ c_{1j_1}c_{2j_2}\cdots c_{nj_n}$ 就等于 $(-1)^n$ $(-1)^m$ (全顶点循环 D_m 的积)。这个所谓全顶点循环的积，意思

---

*1 回路中所有边的方向都与回路的方向一致，这样的回路就叫做顺向回路。

*2 也叫做 P 集循环。

就是包含于全顶点循环中的边的加权之乘积。不言而喻，m就是包含于全顶点循环 D_m 中的顺向回路数。

[2] 连接矩阵的行列式及其拓扑公式

由上所述，连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行列式$|\boldsymbol{C}|$为

$$|\boldsymbol{C}| = (-1)^n \sum (-1)^m \{\text{全顶点循环 } D_m \text{ 的积}\} \qquad (6.3)$$

但是，由于n是图的顶点数，全顶点循环的顺向回路数也可能是1, 2,…, n,所以有必要考虑 $m=1,2,\cdots,n$ 的所有的 D_m。

[例题] 1　试用式(6.3)求与图 6.1 中的图对应的连接矩阵$\boldsymbol{C}$的行列式。

[解答]　图 6.1 中图的全顶点循环仅有一个，就是[a, d, g, h]。由于[a, d, g, h][*1]是顺向回路，且这个全顶点循环是由一个顺向回路构成的，所以 $m=1$, 从而$(-1)^m${全顶点循环 D_m 的积}是$-adgh$。该图的顶点数 $n=4$,从而由式(6.3)可得如下结果：

$$|\boldsymbol{C}| = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ b+c & 0 & 0 & g \\ h & 0 & f & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4(-1)[(a)(d)(g)(h)]$$

$$= -adgh$$

[例题] 2　试按照式(6.3)求矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行列式。

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

[解答]　首先在矩阵的行和列上标上名称。

---

*1　[　]表示由在[　]中所列写的边的集合组成的一个回路，而把回路的边的乘积表示为[$(a)(d)(g)(h)$]。

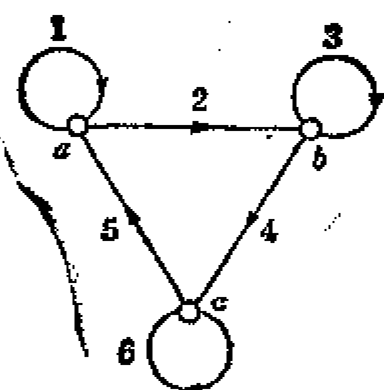


图6.4 图G

$$
C = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{array}
$$

接着，画出以这个矩阵作为连接矩阵的图，得出图 6.4。假如从这个图求出所有的全顶点循环，根据式(6.3)，当然能够求出 $\boldsymbol{C}$ 的行列式。由于 3 个自环[1]、[3]、[6]形成一个全顶点循环，所以它的$(-1)^m${全顶点循环 D_m的积}为$(-1)^3$[(1)(3)(6)]。再者，由(2)、(4)、(5)构成的顺向回路[(2)，(4)，(5)]是全顶点循环，这个$(-1)^m${全顶点循环 D_m 的积}是$(-1)^1$[(2)(4)(5)]。除此之外，不再有全顶点循环。因而根据式(6.3)，得出如下结果：

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 \end{vmatrix} = (-1)^3\{(-1)^3[(1)(3)(6)] + (-1)^1[(2)(4)(5)]\}
$$

$$
= 18 + 40 = 58
$$

6.3 连接矩阵的子行列式

现在研究一下图G的连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的余因子 C_{ij}。若将 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行与第 j 列的元素全部用 0 来代替，则成为

$$
\underline{\boldsymbol{C}} = i\begin{bmatrix} & H_1 & & \overset{j}{\begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} & & H_2 & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & H_3 & & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & & H_4 & \end{bmatrix}
$$

以这种矩阵作为连接矩阵的图 $\underline{G}$，就是把所有从G的顶点 i

出来的边和所有进入顶点 j 的边去掉以后所形成的图。例如，设图 6.1 中的图 G 的连接矩阵的第 2 行和第 3 列的元素为零，则 $\underline{\mathbf{C}}$ 为

$$\underline{\mathbf{C}}=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc}0&a&0&0\\0&0&0&0\\b+e&0&0&g\\h&0&0&0\end{array}\right]\end{array}$$

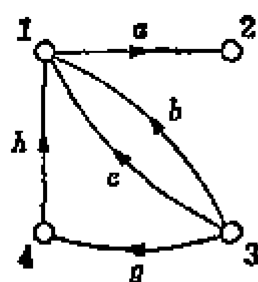


图6.5 图 $\underline{G}$

以这个矩阵作为连接矩阵的图 $\underline{G}$，就是去掉从 G 的顶点 2 出来的边 c 和 d，并去掉进入顶点 3 的边 f 之后所得的图，如图 6.5 所示。

设这种矩阵 $\mathbf{C}$ 的 $(i,\ j)$ 元素为 E，则

$$\underline{\mathbf{C}}(E)=i\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} & & & j & & & \end{array}\\ \begin{bmatrix} & H_1 & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & & H_2 & \\ 0 & \cdots & 0 & E & 0 & \cdots & 0\\ & H_3 & & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\end{matrix} & & H_4 & \end{bmatrix}\end{array} \quad (6.4)$$

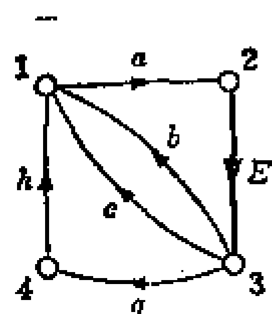


图6.6 图 $\underline{G}(E)$

以这个矩阵作为连接矩阵的图 $\underline{G}(E)$，就是在 $\underline{G}$ 中加上从顶点 i 到顶点 j 的边 E 后所形成的图。对上述例中的 $\underline{G}$ 加上从顶点 2 到顶点 3 的边 E 后所得的图 $\underline{G}(E)$ 如图 6.6 所示。根据式 (6.3)，$\underline{\mathbf{C}}(E)$ 的行列式

$$|\underline{\mathbf{C}}(E)|=(-1)^n\sum(-1)^m$$

$$\{\underline{G}(E)\text{的全顶点循环 } D_m \text{ 的积}\} \qquad (6.5)$$

由于从 $\underline{G}(E)$ 的顶点 i 出来的边仅仅为 E，所以取任一个全顶点循环，含有边 E 的顺向回路必定包括在内。因而，若将 $\underline{G}(E)$ 的全顶点循环按含有 E 的一个顺向回路 $L_m(E)$ 与其他顺向回路

的集合分开来考虑，则式(6.5)可改写为下列形式①：

$$|\underline{C}(E)|=(-1)^n\sum\{(-1)(L_m(E)\text{的积})$$
$$+(-1)^{m'}(\underline{G}(\overline{L_m(E)},E)\text{的全顶点循环 }D_{m'}\text{ 的积})\}\quad(6.6)$$

这里，$\underline{G}(\overline{L_m(E)},E)$指的是从 $\underline{G}(E)$ 中去掉 $L_m(E)$ 的顶点及联接这些顶点的全部的边之后所形成的图。

若设矩阵 $\underline{C}(E)$的E为1，则其行列式和余因子 C_{ij} 相同。若将边E从 $L_m(E)$中去掉，则留下来的部分为从顶点 j 到顶点 i 的顺向路径，所以从式(6.6)可得下述的拓扑公式。

〔连接矩阵的余因子及其拓扑公式〕

$$C_{ij}=(-1)^{n-1}\sum(P_{ji}\text{ 的积})(-1)^{m'}\{G(\bar{P}_{ji})\text{的全顶点循环 }D_{m'}\text{ 的积}\}\quad(6.7)$$

这里要注意 P_{ji} 是从顶点 j 到顶点 i 的顺向路径，$G(\bar{P}_{ji})$ 表示从 G 中去掉属于 P_{ji} 的所有顶点及联接到这些顶点上的所有边之后的图。假若 $G(\bar{P}_{ji})$是空图时，则$(-1)^{m'}\{G(\bar{P}_{ji})$ 的全顶点循环 $D_{m'}$ 的积$\}$为1。

例如，试按照图来直接求图6.1图G的连接矩阵 $\underline{C}$ 的余因子 C_{23}。首先，若求从顶点3至顶点2的顺向路径，则有 $P_1=(a,b)$，$P_2=(a,e)$，$P_3=(a,g,h)$ 三条路径。其次，为了从G求出$G(\bar{P}_1)$，可从G中去掉 P_1 的顶点1，2，3及与这些顶点相关的边，则只留下顶点4。这就是 $G(\bar{P}_1)$。在这个 $G(\bar{P}_1)$ 中仅仅保留着顶点4，不存在全顶点循环，所以 $(-1)^{m'}\{G(\bar{P}_1)$的全顶点循环 $D_{m'}$ 的积$\}$是0。对于 $G(\bar{P}_2)$，也有同样的情况。由于 $G(\bar{P}_3)$ 的顶点

---

① 原文为：

$$|\underline{C}(E)|=(-1)^n\sum\{(-1)(L_m(E)\text{的积})+(-1)^{m'}\}$$
$$\{\underline{G}(\overline{L_m(E)},E)\text{的全顶点循环 }D_{m'}\text{ 的积}\}\quad(6.6)$$

这里，$\underline{G}(\overline{L_m(E)},E)$指的是从 $\underline{G}(E)$中去掉 $L_m(E)$的顶点及联接这些顶点的全部的边之后所形成的图。似误。——译者

是 1,2,3 和 4,若将这些顶点及与其连接着的边从图G中去掉，则什么也没有剩下，所以 $G(\bar{P}_3)$是个空图，$(-1)^{m'}\{G(\bar{P}_3)$ 的全顶点循环 $D_{m'}$ 的积$\}$为 1。于是*[1]

$$C_{23}=(-1)^3(agh)(1)=-agh$$

为慎重起见，写成

$$C_{23}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b+e & 0 & g \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

试再从同一矩阵求 C_{21} 来看一看。从顶点 1 至顶点 2 的顺向路径仅是 $P_1=(a)$。$G(\overline{P_1})$ 成为图 6.7 中的图。$G(\overline{P_1})$ 的全顶点循环是 $D_1=fg$ 的一个顺向回路，所以$(-1)^{m'}\{G(\bar{P}_1)$的全顶点循环$D_{m'}$的积$\}$为$-fg$。从而

图6.7 $G(\overline{P_1})$

$$C_{21}=(-1)^3(a)(-fg)=afg$$

$\boldsymbol{C}$ 的$(i,\ j)$余因子 C_{ij}，当 $i\neq j$ 时，是用式(6.7)来确定的，但在 $i=j$ 的情况下将怎样求得呢？这时，对应于式(6.4) 的E作为$(i,\ j)$元素来说，边E应当是联接于顶点 i 上的自环，因而E本身就成为一个顺向回路。而且在顶点 i 上仅仅联接着 E。也就是，任一全顶点循环都包含着由E形成的一个顺向回路。从而式.7)变成

$$_i=(-1)^{n-1}\sum(-1)^{m'}\{G(\bar{i})\text{的全顶点循环 }D_{m'}\text{ 的积}\} \quad (6.8)$$

$G(\bar{i})$是指从图G中去掉顶点 i 及联接该顶点的边之后的图。

前例一样，由图 6.1 的图G求连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的余因子 C_{11}。若G中去掉顶点 1 及联接顶点 1 的边，便得出图 6.8 的 $G(\bar{1})$。

当 $P_3=(a,\ g,\ h)$时，路径可记为路径的边的加权的乘积$[(a)(g)(h)]$，在不致混淆的情况下，可简单地记为(agh)。

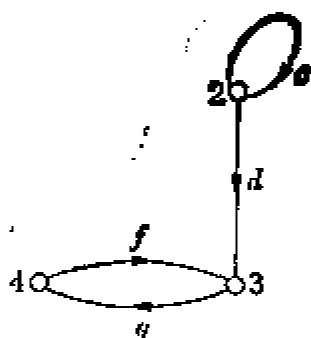


图 6.8 $G(\bar{1})$

在这个 $G(\bar{1})$ 中，由顺向回路[(c)] 和 [(f)，(g)] 所构成的全顶点循环只有唯一的一个，所以按照式(6.8)，得

$$C_{11}=(-1)^3(-1)^2[(c)][(f)(g)]=-cfg$$

在这里，让我们介绍一下简单的应用。若设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是正则的($|\boldsymbol{A}|\neq 0$)，则具有 n 个未知数的联立方程*1 $\boldsymbol{A}\mathbf{x}=\boldsymbol{B}$ 的解为 $\mathbf{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$。这个 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 由

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{bmatrix}$$

构成(参见附录式(附 9.4))。作出以 $\boldsymbol{A}$ 为连接矩阵的图，按照这个图，使用式(6.3)、式(6.7)、或(6.8)便可求得解。

[例题] 试用式(6.3)、式(6.7)和式(6.8)求下列方程的解。

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 0 & 6\\ 0 & 7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

[解答] 首先，作出以

$$\boldsymbol{A}=\begin{matrix} & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 0 & 6\\ 3 & 0 & 7 & 8\end{matrix}$$

为连接矩阵的图，如图 6.9(a)。

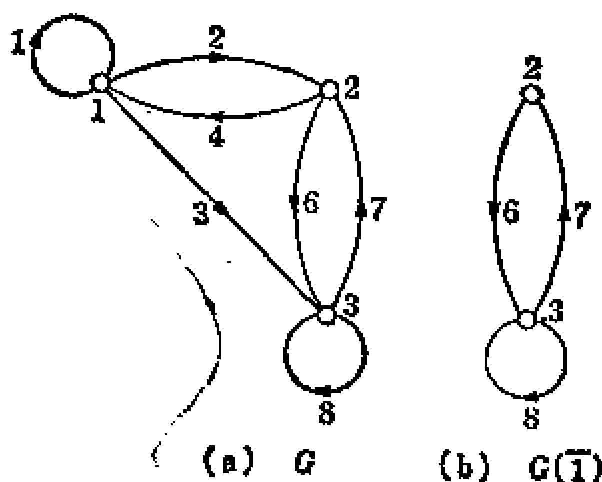


图 6.9 图 G 与 $G(\bar{1})$

顺向回路[(3)，(7)，(4)] 就是其自身全顶点循环。顺向回路 [1] 与[(6)，(7)] 构成一个全顶点循环。再者，顺向回路[8]与[(2)，(4)] 也构成一个全顶点循环。除此之外，不再有全顶点循环。所

*1 参见附录 1[10]。

以，由式(6.3)得行列式$|A|$为

$$|A|=(-1)^3\{(-1)[(3)(7)(4)]+(-1)^2[(1)(6)(7)]+(-1)^2[(8)(2)(4)]\}=-22$$

为了求余因子 A_{11}，从图G中去掉顶点 1 及与其联接的边 (1)，(2)，(4)与(3)，如图 6.9(b)的 $G(\bar{1})$，从 $G(\bar{1})$ 找出全顶点循环就行了。由式(6.7)可得

$$A_{11}=(-1)^2\{(-1)[(6)(7)]\}=-42$$

由此可得$x_1=\frac{-42}{-22}\times 9$。对于 x_2 和 x_3，希望读者自己去求。

6.4 开关电路分析

当道路中有门时，怎样通过此道路呢?这个问题取决于路上的门是否开着以及怎样开着。这可用图来表示这种道路通还是不通。其规则是，在图的边上给出布尔变量，如图 6.10 所示，当此变量为 1 时，能够沿着边上所示的方向通过这个边，但当变量为 0 时，便不能通过这个边。当这个边为无向边时，跟电路上的开关相同，所以由这种边所构成的图叫做**开关电路(开关网络)**。

图 6.10 有向开关

以图 6.11 所示开关电路为例，我们来研究一下，当布尔变量 x, y, z, u, v, w 为任一状态时，从顶点 i 到顶点 j 的道路是否通。假如 x 为 1，y 为 1，那么从顶点 i 至顶点 j 的路是通的，这是明显的。$x=z=v=1$ 时路也通，$u=v=1$ 时路也通。若用布尔代数表示这些通路，则为

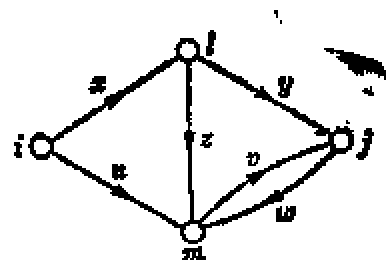


图 6.11 开关电路 G

$$F_{ij}=xy+xzv+uv$$

这个 F_{ij} 就叫做从顶点 i 到顶点 j 的**开关函数**。除此之外，虽然

$x=y=z=1$ 时路也通，但在布尔代数中，由于 $xy+xyz=xy$，所以没有必要把 xyz 计入 F_{ij}。由此可知，若用 $\sum f_p$ 表示开关函数 F_{ij}（f_p 是从顶点 i 到顶点 j 的顺向路径中的边的乘积），则 F_{ij} 为

$$F_{ij}=\sum(P_{ij}\text{ 的积}) \qquad (6.9)$$

在图 6.11 的图中，由于从顶点 i 到顶点 j 的顺向路径是 $P_1=(x, y)$，$P_2=(x, z, v)$和 $P_3=(u, v)$，所以 $F_{ij}=xy+xzv+uv$。同样，从顶点 i 到顶点 m 的开关函数 $F_{im}=u+xz+xyw$，因为从顶点 i 到 m 的顺向路径是 (u)，(x, z)，(x, y, w)。

现在来研究一下用开关电路的连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 求开关函数的方法。在 6.1 节中已经讲过，若用布尔代数求 $\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{C}^k$，则它的 (i,j) 元素就是从顶点 i 到顶点 j 的顺向路径的乘积之和。对于这个问题，就求 F_{ij} 来说，如果求出 $\sum_{k=1}^{n-1}\boldsymbol{C}^k$ 的 (i, j) 元素，就很容易得出解答。图 6.11 的开关电路的连接矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ l \\ m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & j & l & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & x & u \\ 0 & 0 & 0 & w \\ 0 & y & 0 & z \\ 0 & v & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

于是 $\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{C}^k$ 为

$$\sum_{k=1}^{3}\boldsymbol{C}^k=\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ l \\ m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & j & l & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & xy+uv+xzv & x & u+xz+xyw \\ 0 & vw & 0 & w \\ 0 & y+zv & 0 & z+yw \\ 0 & v & 0 & vw \end{bmatrix} \end{array}$$

据此，因为从顶点 i 到 j 的开关函数 F_{ij} 是 (i, j) 元素，所以

$$F_{ij}=xy+uv+wzv$$

由于$\sum_{k=1}^{n-1}C^k$计算复杂，所以让我们再考察一下其他方法。

设开关电路G的连接矩阵为$\boldsymbol{C}$。把加上单位矩阵$\boldsymbol{U}$的$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U}$作为连接矩阵的图$G_u$就是在$G$的全部顶点上加上自环(1)。在图6.11中开关电路G的顶点i, j, l, m上加上自环(1)的图如图6.12所示。根据式(6.7)，$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U}$的余因子$(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})_{ji}$是①

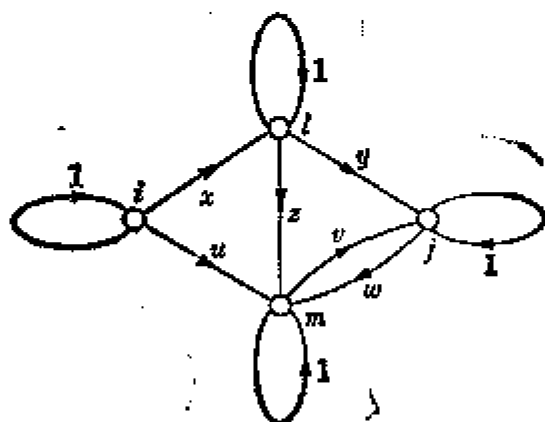


图6.12 图G_u

$$(C+U)_{ji}=(-1)^{n-1}\sum(P_{ij}\text{ 的积})(-1)^{m'}$$
$$\{G_u(\overline{P_{ij}})\text{的全顶点循环 }D_{m'}\text{ 的积}\} \qquad (6.10)$$

式中，P_{ij}是从顶点i到顶点j的顺向路径，$G_u(\overline{P_{ij}})$是从G_u中去掉P_{ij}的顶点及联接这些顶点的所有边之后所得的图。由于$G_u(\overline{P_{ij}})$的任一顶点上都带有自环(1)，所以若将自环集中起来，就成全顶点循环。对此，有

$$(-1)^{m'}\{G_u(\overline{P_{ij}})\text{的全顶点循环 }D_{m'}\text{ 的积}\}=(-1)^{m'}+\cdots$$

其中m'是$G_u(\overline{P_{ij}})$的顶点数。用布尔代数可得

$$\{G_u(\overline{P_{ij}})\text{的全顶点循环 }D_{m'}\text{ 的积}\}=1$$

所以，式(6.10)成为

$$(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})_{ji}=\sum(P_{ij}\text{ 的积}) \qquad (6.11)$$

因为这是从G的顶点i到j的全部顺向路径的乘积之和，所以从顶点i到j的开关函数F_{ij}为

---

① 按克莱姆法则，余因子中各项前应有正、负号之分。此处在计算开关函数时，全部取正号。——译者

$$F_{ij}=(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})_{ji} \tag{6.12}$$

在图 6.11 的开关电路的连接矩阵上加上单位矩阵后，$(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})$ 为

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U}=\begin{array}{c} \\ i \\ j \\ l \\ m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} i & j & l & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & u \\ 0 & 1 & 0 & w \\ 0 & y & 1 & z \\ 0 & v & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

这个矩阵的(j, i)余因子$(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})_{ji}$是

$$(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})_{ji}=\begin{array}{c} \\ i \\ l \\ m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} j & l & m \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & x & u \\ y & 1 & z \\ v & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}=x(y+vz)+uv$$

这就是从顶点 i 到 j 的开关函数 F_{ij}。

再考察一下图 6.13 中无向图的开关电路。若在其连接矩阵 $\boldsymbol{C}$ 上加上单位矩阵 $\boldsymbol{U}$，则得

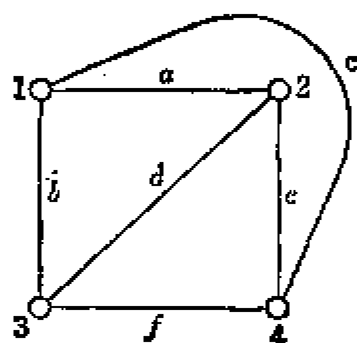


图 6.13 无向(开关电路)图 G

$$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ a & 1 & d & e \\ b & d & 1 & f \\ c & e & f & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

因为从顶点 1 到顶点 2 的开关函数 F_{12} 为$(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})_{21}$，所以

$$F_{12}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 1 & f \\ e & f & 1 \end{vmatrix} \end{array}=a+b(d+ef)+c(df+e)$$

习　题

[1] 试求图 6.14 中图的所有全顶点循环。

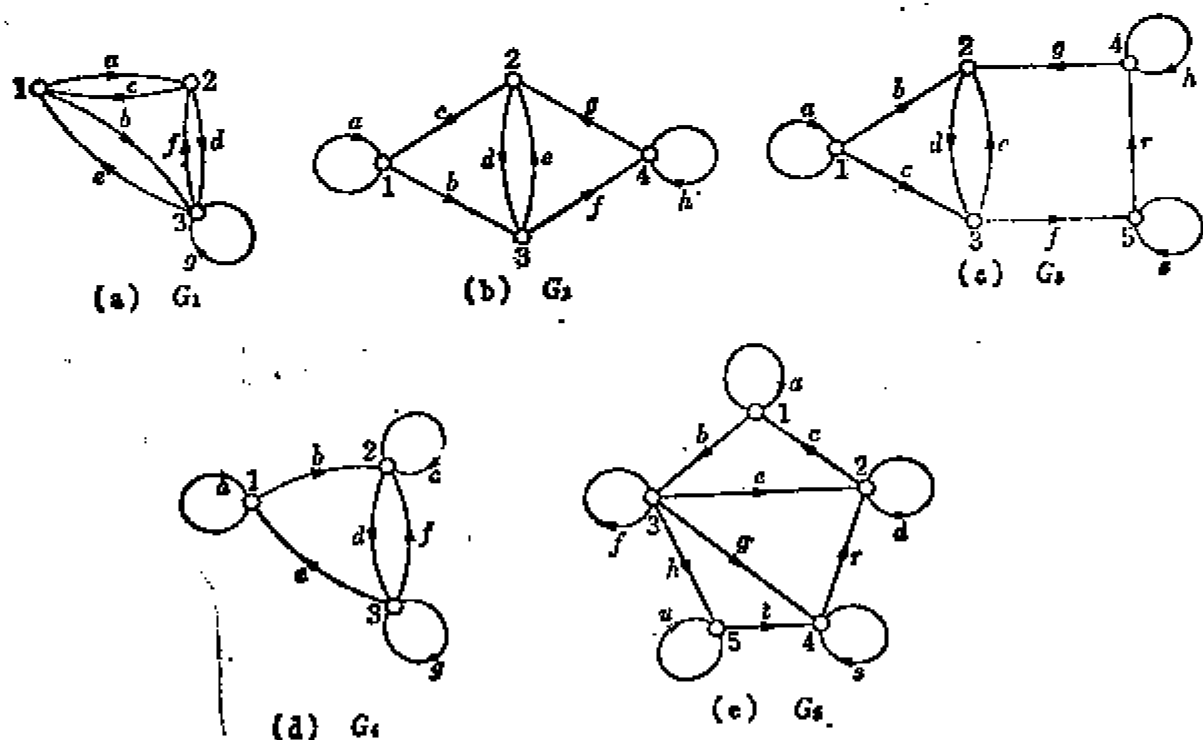


图 6.14

[2] 试用式(6.3)求下列矩阵 C 的行列式。

(a) $C=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & d \\ e & f & g \end{bmatrix}$　　(b) $C=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & d \\ e & f & g \end{bmatrix}$

(c) $C=\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & e & 0 & f \\ 0 & g & 0 & h \end{bmatrix}$　　(d) $C=\begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & f \\ 0 & g & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & s \end{bmatrix}$

(e) $C=\begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f & g & h \\ 0 & r & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t & u \end{bmatrix}$

[3] 试根据式(6.7)求题[2]中矩阵的余因子 C_{12}。

[4] 试根据式(6.8)求题[2]中矩阵的余因子 C_{11}。

[5] 试用式(6.3)、式(6.7)、式(6.8)从下列方程中求出 x_1。

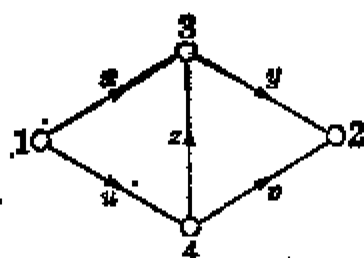
(a)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 \qquad\qquad + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 6x_1 + 3x_2 \qquad &= 10 \\ 7x_2 + 2x_3 &= 11 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

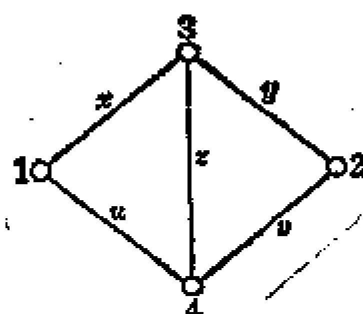
(c)
$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 &= 10 \\ -2x_1 - 4x_4 &= 15 \\ -3x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 7 \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 9 \\ 5x_3 + 6x_4 &= 0 \\ -5x_1 - 6x_2 - 7x_3 - 8x_4 &= 0 \end{aligned}$$

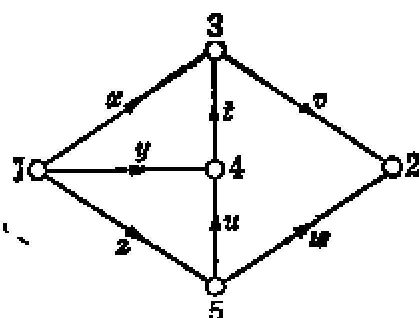
[6] 试用$(C+U)^{n-1}$求图6.15开关电路的开关函数 F_{12}。



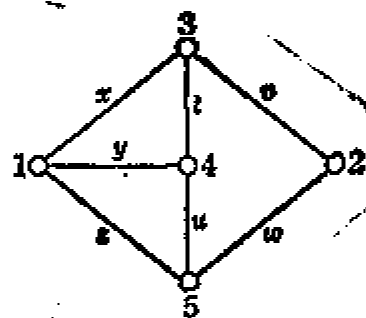
(a) 开关电路 N_1



(b) 开关电路 N_2



(c) 开关电路 N_3



(d) 开关电路 N_4

图6.15 开关电路

[7] 试用余因子$(C+U)_{21}$求题[6]中开关电路的开关函数 F_{12}。

参考文献

参阅第七章的参考文献。

第七章 信号流图

【要点】 线性联立方程可用顶点和边均具有“权”的图表示，这种图称为**信号流图**(*signal-flow graph*)*1。在本章中，学习不直接解方程式，而由信号流图，根据梅森公式(Mason's formula)求解的方法。梅森公式是利用图的等效变换或图的路径、回路等特殊的子图而得的。信号流图是分析电路、电子线路、反馈和控制系统等所谓线性系统(linear system)的一个重要方法。

7.1 信号流图

若将线性方程式的变量用顶点表示，将方程式的系数作为有向边的权*2，该方程式就可以用图表示。例如，线性方程式 $x_3=ax_1+bx_2$ 表示为图7.1(a)。它表明，顶点 x_3 的值等于进入 x_3 的有向边 a、b 分别与作为此两个支路起点的变量 x_1、x_2 的乘积(ax_1 和 bx_2)的和。又如，方程式为 $x_3=ax_1+bx_2+cx_3$ 的情况是，

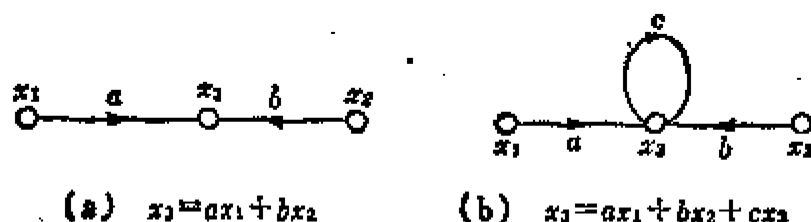


图7.1 信号流图的描绘方法

---

*1 1953年由 S. J. Mason 提出[参看文献1]。

*2 也叫传递系数(transmittance)。

具有权 c 的自环从 x_3 发出，进入同一个 x_3，结果，系数 a、b、c 所对应的三条边都进入顶点 x_3。

这样的图的模型，可以看作具有中继局的接收、发送信号的信号传送系统。在中继局，把来自许多发送局或中继局的信号汇总，这些信号从中继局分支，通过输出信号通道，发送给其他中继局和接收局。根据这样的相似性，这种图命名为信号流图。因此，规定信号流图遵循以下基本的代数规则："用顶点表示的变量的值，是进入该顶点的各有向边的权与作为起点的变量的乘积之和"［图 7.2(a)］。即

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{7.1}$$

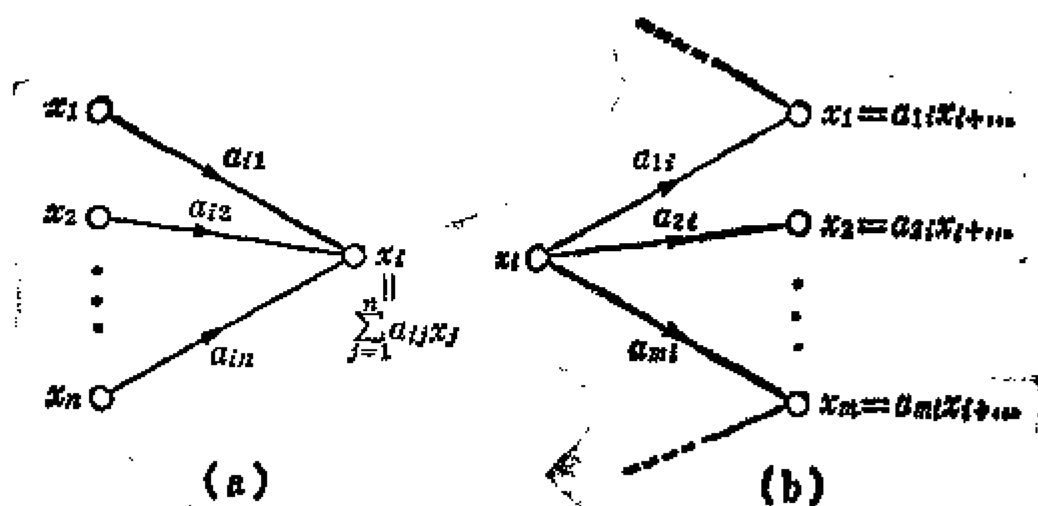


图 7.2　信号流图中的代数规则

同样，式(7.1)也表示，顶点所表示的变量的值被传递到由该点发出的全部有向边的箭头所指顶点的变量。即如图 7.2(b) 所示，$x_k(1 \leqslant k \leqslant m)$ 含有 $a_{ki}x_i$（作为项）。

例如，在图 7.3(a) 的梯形电路中，试画出其电压和电流关系的信号流图。今设流过 R_1、R_3、R_5 的电流分别为 I_1、I_2、I_3，而 R_2、R_4、R_6 上的电压分别为 V_1、V_2、V_3，则下列方程式成立。

$$
\left.\begin{aligned}
I_1&=\frac{E-V_1}{R_1}=G_1(E-V_1)\\
I_2&=\frac{V_1-V_2}{R_3}=G_3(V_1-V_2)\\
I_3&=\frac{V_2-V_3}{R_5}=G_5(V_2-V_3)\\
V_1&=R_2(I_1-I_2)\\
V_2&=R_4(I_2-I_3)\\
V_3&=R_6I_3
\end{aligned}\right\}\qquad(7.2)
$$

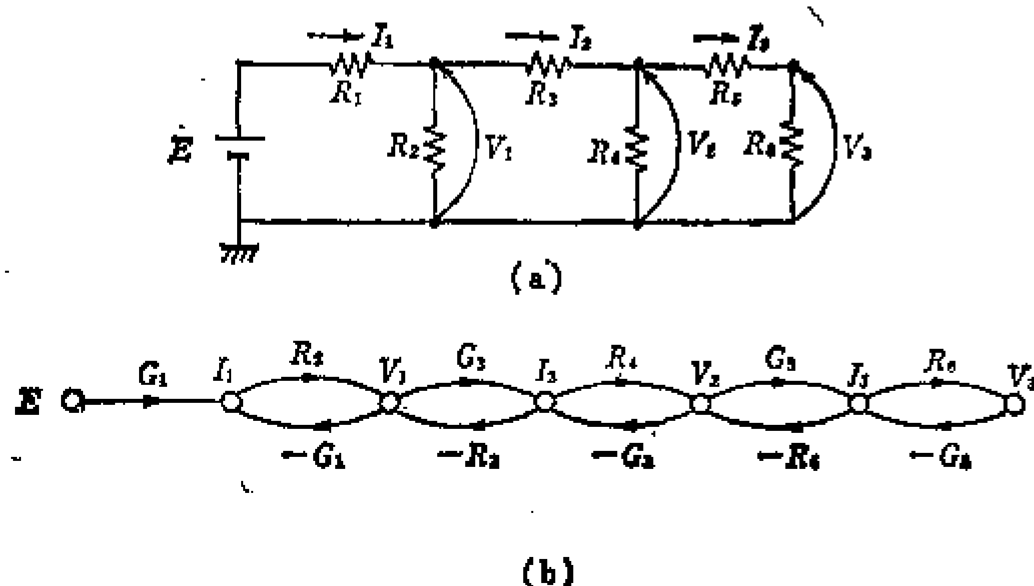


图 7.3 表示梯形电路及其电路方程式的信号流图举例

式中，$1/R_1=G_1$，$1/R_3=G_3$，$1/R_5=G_5$，取 E，I_1，V_1，I_2，V_2，I_3，V_3 为顶点时，得图(b)那样的信号流图。当然，若电压和电流变量的选取方法不同，方程式的表达方式不同，信号流图也就不同。

7.2 用图的化简法求解方程

线性联立代数方程的一个解法，是将不需要的变量逐次消去而求得答案的方法。在图上进行类似的作法，即若将表示变量的顶点消去，利用图的等效变换进行图的化简，便可以求解方程。这

种图的化简法，应用于反馈和控制中传递函数的计算和求变量之间的关系式等等。另外，还有不进行图的化简，而用列举图的回路和路径直接求解方程的方法，称作梅森公式，在下节将再作说明。

若将表示方程式的信号流图和表示该方程式变形后所得式子的信号流图相比较，则因为式的变形和图的变换相对应，得到如下图的等效变换公式。

[图的等效变换]

首先，图 7.4 的(I)是串联边的化简，将 $x_2=ax_1$ 代入 $x_3=bx_2$，为 $x_3=(ba)x_1$，因而很明显，图(I)-(a)可以变换为图(I)-(b)。(II)是按式(7.1)的求和公式化简并联边。(III)表示去除顶点。假定在图(e)中，顶点 x_1, x_2, x_3, x_4 可连接除图示边之外

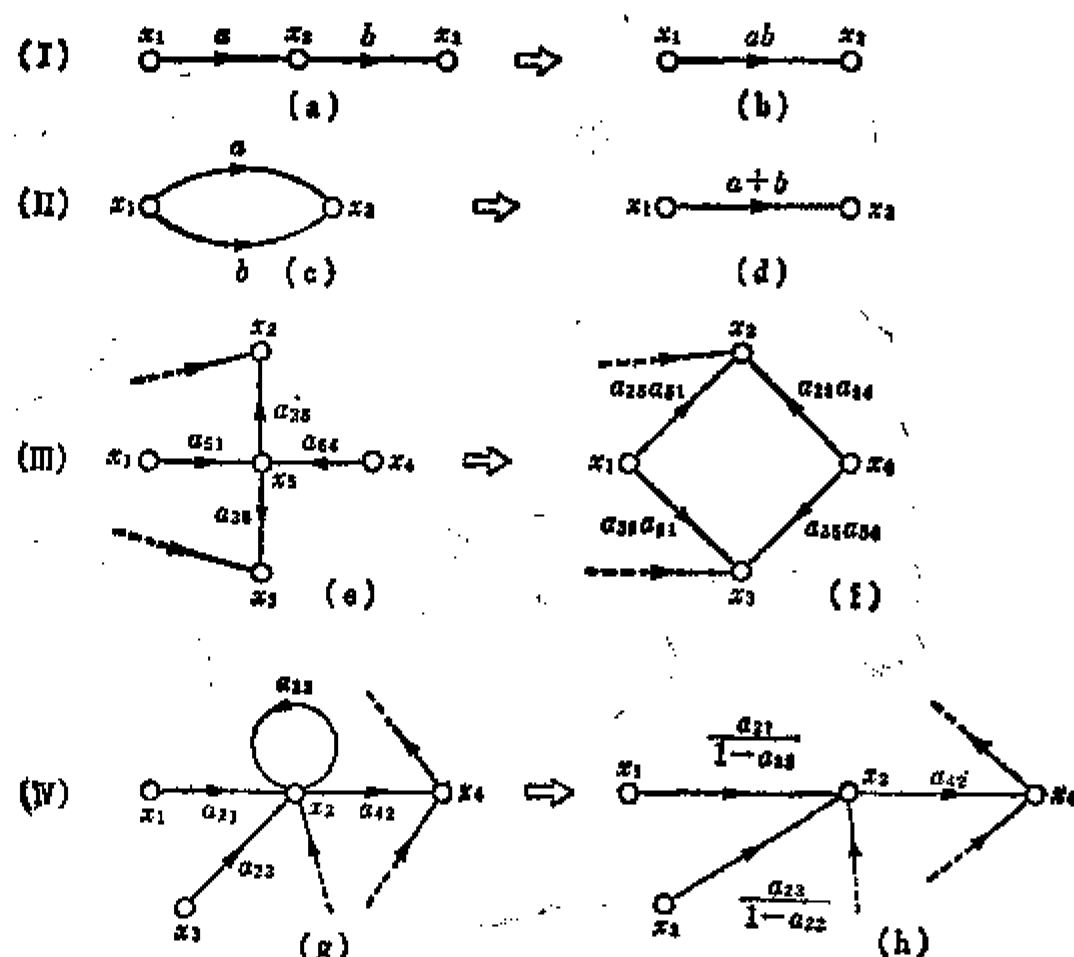


图 7.4　信号流图中的基本等效变换

的有向边，而顶点 x_5 只连接图示的边。这时，顶点 x_5 的值是 $x_5 = a_{51}x_1 + a_{54}x_4$。对于顶点 x_2，是 $x_2 = a_{25}x_5 + \cdots$，因而若将 x_5 代入，则有

$$x_2 = a_{25}(a_{51}x_1 + a_{54}x_4) + \cdots$$

所以

$$x_2 = (a_{25}a_{51})x_1 + (a_{25}a_{54})x_4 + \cdots$$

变为与图(f)的顶点 x_2 的式子相同。看一下图(e)，从 x_1 到 x_2 有 $a_{51} \to a_{25}$ 这样的顺向路径，因此在图(f)中，从 x_1 到 x_2 用有向边作顺向路径 $a_{25}a_{51}$。同样，在图(e)中，有从 x_4 到 x_2 的 $a_{54} \to a_{25}$ 这样的顺向路径，所以图(f)中给出从 x_4 到 x_2 的有向边 $(a_{25}a_{54})$。在完全相同地化简的图(f)中，有从 x_1 到 x_3 的边 $(a_{35}a_{51})$，从 x_4 到 x_3 的边 $(a_{35}a_{54})$。

从以上例子容易理解，去掉顶点时，首先考虑与所要去掉的顶点相邻接的任意两个顶点，由通过所要去掉顶点的两条边所组成的顺向路径用一条边去置换。然后，使该边的权为属于路径的两条边的权之积。对于所有与之邻接的两顶点均施行此作法即可。

(IV)表示消去自环的等效变换。图(g)的顶点 x_2 有自环。首先，顶点 x_2 的式子是

$$x_2 = a_{22}x_2 + a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots$$

将该式改写成

$$x_2 = \frac{1}{1 - a_{22}}(a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \cdots)$$

这就是，为了去掉自环，将进入 x_2 的全部边的权乘以 $1/(1 - a_{22})$ 即可，结果得图(h)。

只在联立方程式右边的变量称为输入变量。然而，方程式的任何变量都可以成为输出变量，由信号流图所求的解就是输入变

量和输出变量的关系。现举例说明。分析下面的联立方程式，

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= a_{11}x_1 + a_{13}x_3 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{23}x_3\end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

输入变量是 x_3。求 x_2/x_3。首先，表示该联立方程式的信号流图为图 7.5(a)。因此，为了去掉自环 a_{11}，利用变换(IV)，成了图(b)那样。又用(I)得到去掉了顶点 x_1 的图(c)。最后用变换(II)，成了图(d)。因此，由该信号流图得

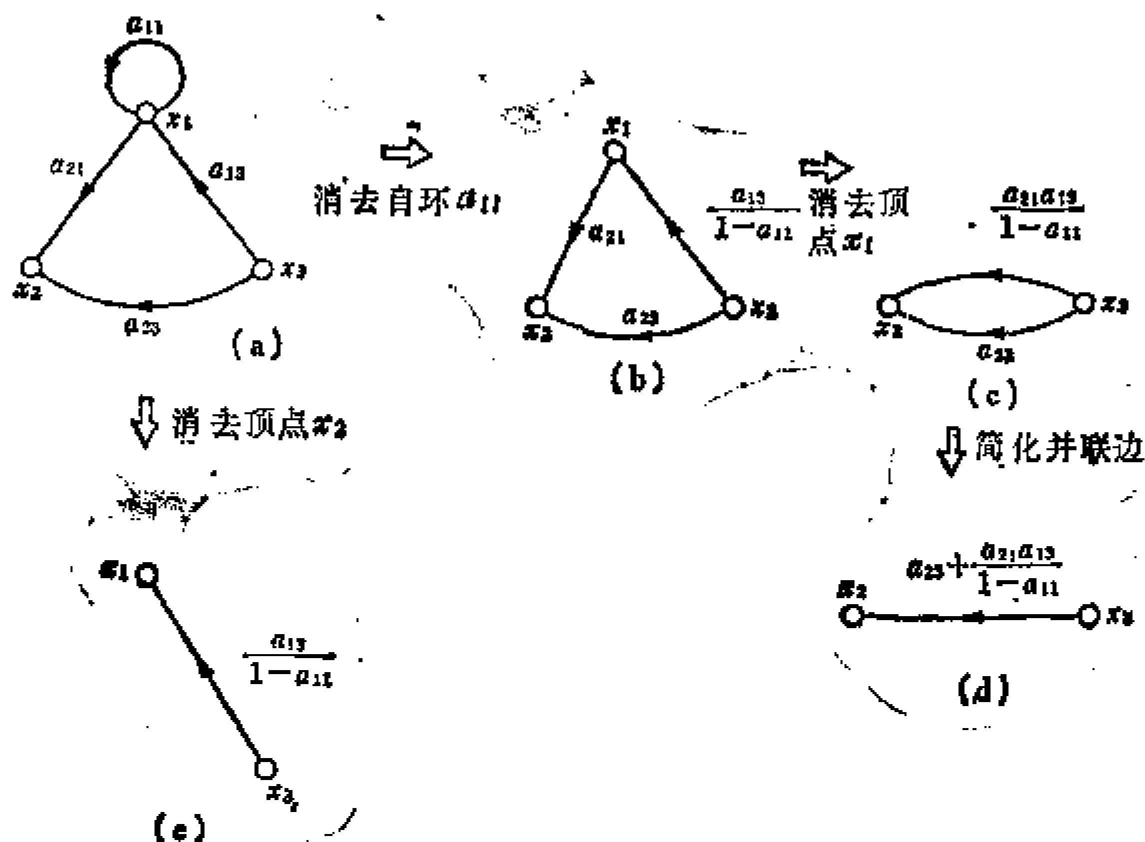


图 7.5　信号流图的化简

$$x_2 = \left(a_{23} + \frac{a_{21}a_{13}}{1-a_{11}}\right)x_3$$

因而得到解答为

$$\frac{x_2}{x_3} = a_{23} + \frac{a_{21}a_{13}}{1-a_{11}}$$

其次，设输出变量为 x_1，求 x_1/x_3。用变换(III)从图(b)中去掉顶点 x_2。由于这种情况没有通过顶点 x_2 的顺向路径，所以 x_1

与 x_3 之间如图(e)所示那样，由此得 $x_1=\frac{a_{13}}{1-a_{11}}x_3$。结果，$x_1/x_3$ 的解为 $a_{13}/(1-a_{11})$。

图 7.6 是不包含回路，只在一个方向上传递信号的信号流图的例子。x_1 的值传递给 x_2 和 x_3，同样，由于 x_2 传给 x_3 和 x_4，x_3 传给 x_4 等分别传递，x_1 的值就可以通过由 x_1 到 x_4 的全部可能

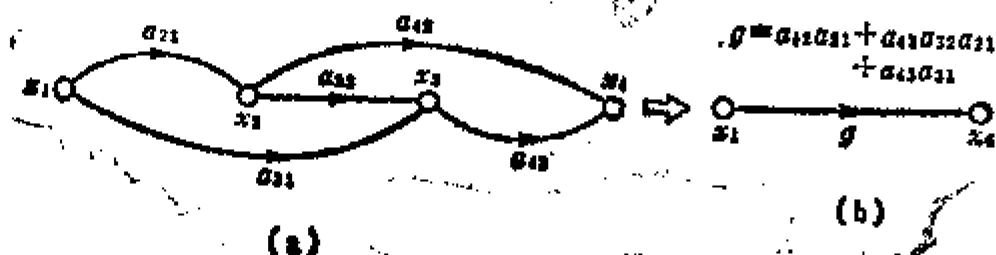


图 7.6　不含回路的一个方向的信号流图

的路径传递。因此列举全部从 x_1 到 x_4 的可能的顺向路径，将各路径所属的边的权相乘起来，对全部可能的路径，计算这些乘积之和，就得到与图(b)的有向边等效的权。即为下式。

$$x_4=(a_{42}a_{21}+a_{43}a_{32}a_{21}+a_{43}a_{31})x_1$$

容易理解，括号中的各项表示从 x_1 到 x_4 的路径。

[例题] 1　证明图 7.7 (a)的信号流图可以变换为图(b)的信号流图。

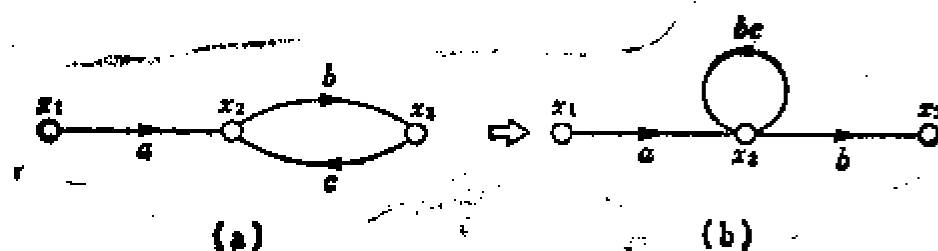


图 7.7

[略证]　对于图(a)的方程式是

$$x_2=ax_1+cx_3$$

$$x_3=bx_2$$

由该两式所得的联立方程式

$$x_2 = ax_1 + cbx_2$$

$$x_3 = bx_2$$

的信号流图为图(b)。

［例题］2　试说明图 7.8(a)可以化简为图(b)，并求 x_4/x_1。

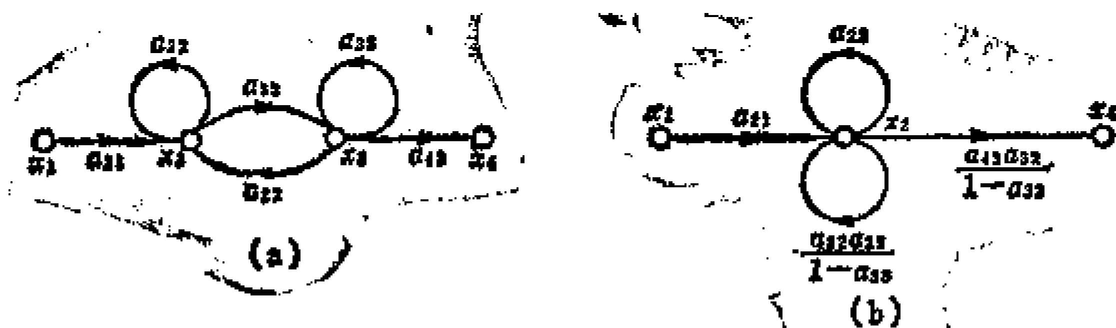


图 7.8

［解答］　去掉顶点 x_3，分别对从 x_2 通过 x_3 到 x_4 的信号流和从 x_2 通过 x_3 流到同一个 x_2 的两种情况进行分析即可。从 x_2 到 x_4，利用等效变换(IV)，则有 $x_4 = \frac{a_{43}a_{32}}{1-a_{33}}x_2$ 的关系。另一方面，从 x_2 到 x_2，考虑在等效变换(IV)中 $x_1 = x_4$［图 7.4(g)］即可。所以$\frac{a_{32}a_{23}}{1-a_{33}}$ 的值为通过 x_3 再返回原处的值。由上述得图 7.8(b)，因此

$$x_4/x_1 = \frac{\dfrac{a_{43}a_{32}a_{21}}{1-a_{33}}}{1-\left(a_{22}+\dfrac{a_{32}a_{23}}{1-a_{33}}\right)}$$

7.3 梅森公式

利用变换化简信号流图以求解联立方程的方法，上节已述。本节说明怎样通过求信号流图的特殊子图而得到解的方法。

［I］梅森公式

1953 年梅森发表了以下公式：

设输入变量为 x_{n+1}，输出变量为 x_1 时，x_1/x_{n+1} 为

$$\frac{x_1}{x_{n+1}}=\frac{\sum P_k\{G(\overline{P_k})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}}{1-\sum L_1+\sum L_2+\cdots+(-1)^m\sum L_m+\cdots} \quad (7.4)$$

现称此式为梅森公式。$\sum L_m$ 的 L_m 是没有公共顶点的 m 个顺向回路所属各边的权之积，$\sum$表示信号流图的全部 L_m 之和。P_k 是从顶点 x_{n+1} 到 x_1 的顺向路径，$G(\overline{P_k})$ 表示从信号流图 G 中去掉 P_k 的全部顶点及与它们连接的全部边的图。输出变量的顶点可以是任何顶点，但输入变量的顶点必须是这样的顶点，即与之相连的边全部从该顶点发出（即入次数为0，只存在出次数）。

现举例说明此公式的使用方法。图 7.9 的图 G 是下列联立方程式的信号流图。

$x_1=x_2+2x_3+3x_4$

$x_2=4x_1+5x_2$

$x_3=6x_1+7x_2+8x_3+9x_4$

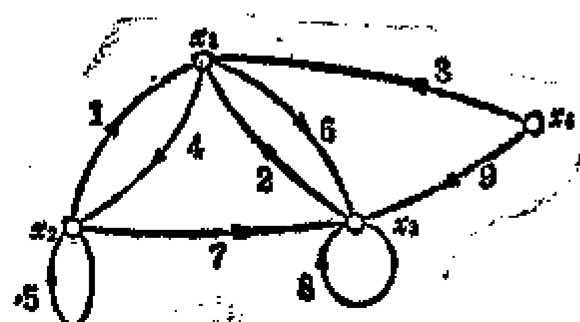


图 7.9 信号流图 G

欲由该方程求 x_1/x_4。首先，G 的顺向回路为 [(1),(4)]，[(2),(6)],[5],[8],[(2),(4),(7)]，因而 $\sum L_1$ 为

$$\sum L_1=[(1)(4)]+[(2)(6)]+[5]+[8]+[(2)(4)(7)]$$
$$=85$$

回路[(2),(6)]和[5]没有公共顶点，因而为 $L_2^{(1)}$。同样，[(1),(4)]和[8]也为 $L_2^{(2)}$，又[5]和[8]也为 $L_2^{(3)}$。此外不再有 L_2，因此

$$\sum L_2=[(2)(6)][(5)]+[(1)(4)][8]+[5][8]$$
$$=132$$

没有公共顶点的三个或三个以上回路并不存在，所以 $\sum L_3=\sum L_4=\cdots=0$。因而梅森公式的分母应为

$$1-\sum L_1+\sum L_2\cdots=1-85+132=48$$

其次，从顶点 x_4 到 x_1 的顺向路径有两个。一个是仅由边(3)构成的路径 P_1，另一个是由边(2)和边(9)组成的顺向路径 P_2。$G(\overline{P_1})$ 是取走 P_1 的顶点 x_1, x_4 及与它们相连接的边的图，因而为图 7.10(a)。该图的 $(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$ 为

$$G(\overline{P_1})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$$
$$=1-[5]-[8]+[5][8]$$

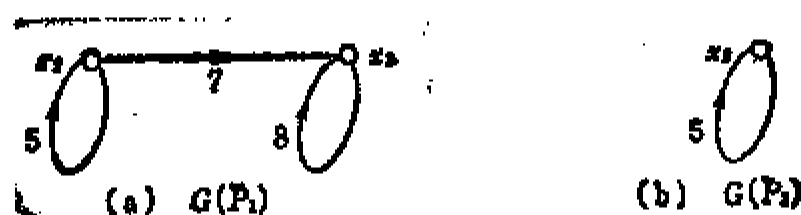


图 7.10 $G(\overline{P_1})$和 $G(\overline{P_2})$

同样，$G(\overline{P_2})$是图 7.10(b)，所以

$$G(\overline{P_2})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$$
$$=1-[5]$$

由上得梅森公式的分子为

$$\sum P_k\{G(\overline{P_k})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}$$
$$=(3)\{1-[5]-[8]+[5][8]\}+(2)(9)\{1-[5]\}$$
$$=12$$

所以，$x_1/x_4=12/48=1/4$

再举一例。图 7.11 的信号流图 G，是从图 7.9 的图中去除自环 (5) 的图。与之对应的联立方程为

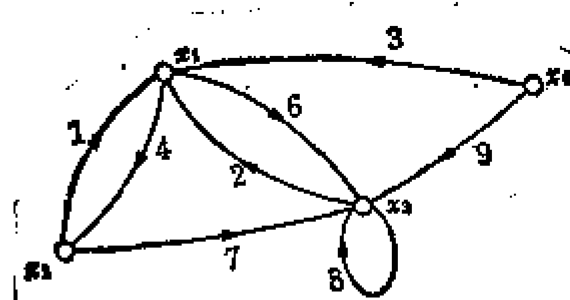


图 7.11 信号流图 G

$$\left.\begin{aligned} x_1&=x_2+2x_3+3x_4\\ x_2&=4x_1\\ x_3&=6x_1+7x_2+8x_3+9x_4 \end{aligned}\right\}$$

首先寻找为了求 $\sum L_1$ 的顺向回路，有[(1),(4)],[(2),(6)],

[8],[(2),(4),(7)]四个,因而

$$\sum L_1=[(1)(4)]+[(2)(6)]+[8]+[(2)(4)(7)]=80$$

为求 $\sum L_2$ 的两个无公共顶点的顺向回路是[(1),(4)]和[8],因而

$$\sum L_2=[(1)(4)][8]=32$$

$\sum L_3=\sum L_4=\cdots=0$ 的情形与上例相同。梅森公式的分母为

$$1-\sum L_1+\sum L_2=1-80+32=-47$$

从顶点 x_4 到顶点 x_1 的顺向路径与上例相同。P_1 是边 (3), P_2 是边 (2) 和 (9)。$G(\overline{P_1})$是从图 7.10(a) 的图中去掉了自环 [5] 的图, $G(\overline{P_1})$的$(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$为

$$G(\overline{P_1})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$$
$$=1-[8]$$

$G(\overline{P_2})$是从图 7.10(b)的图中除去了自回路[5]的图,仅由顶点 x_2 组成。因此没有顺向回路,所以

$$G(\overline{P_2})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)=1$$

梅森公式的分子为

$$\sum P_k\{G(\overline{P_k})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}$$
$$=(3)\{1-(8)\}+(2)(9)\{(1)\}=-3$$

所以 $x_1/x_4=-3/-47$

[2] 梅森公式的证明

在此不严密地证明公式,而利用图 7.11 的例说明该公式是成立的。写出与信号流图对应的联立方程式为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

在此方程中加上以 x_4 为输入变量、x_1 为输出变量的式

$$x_4 = Kx_1$$

时，则成为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ K & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

这个方程式是 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{AX}$ 的形式，因而可改写成

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{U})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$

在上述例中为

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8-1 & 9 \\ K & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

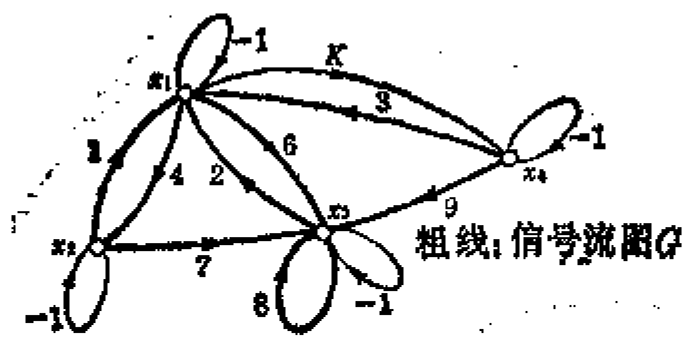


图7.12 图 G_s

该系数矩阵的转置矩阵为

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 6 & K \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 8-1 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & -1 \end{bmatrix}$$

画出以此矩阵为连接矩阵的图 G_s，则得图 7.12。很明显，该 G_s 中包含了已给出的信号流图。换句话说，在信号流图中，将边K从输出变量的顶点接到输入变量的顶点，并且全部顶点均加上自环(-1)时，便得到以$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})^t$为连接矩阵的图 G_s。根据上一章，连接矩阵的行列式为

$$|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{U}| = (-1)^n \sum (-1)^m \{\text{全节点循环 } D_m \text{ 的积}\}$$

n 是变量的个数。$\sum(-1)^m\{$全节点循环 D_m 的积$\}$可分成含有边K和不含边K的两部分，故

$$|A-U|=(-1)^n D+(-1)^n KE$$

在此式中，D是 $\sum(-1)^r$\{不含K的全顶点循环 D_r 的积\}，KE 是 $\sum(-1)^s$\{含K的全顶点循环 D_s 的积\}。由图 7.12 得上述例子的行列式为

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 6 & K \\ 1 & -1 & 7 & 0 \\ 2 & 0 & 8-1 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^4 D+(-1)^4 KE$$

$$\begin{aligned}
&=(-1)^4\{(-1)^4[-1][-1][-1][-1] \\
&\quad+(-1)^3[(1)(4)][-1][-1] \\
&\quad+(-1)^3[(2)(6)][-1][-1] \\
&\quad+(-1)^4[8][-1][-1][-1] \\
&\quad+(-1)^2[(2)(4)(7)][-1] \\
&\quad+(-1)^3[(1)(4)][8][-1]\} \\
&\quad+(-1)^4\{(-1)^3[(K)(3)][-1][-1] \\
&\quad+(-1)^3[(K)(3)][8][-1] \\
&\quad+(-1)^2[(K)(2)(9)][-1]\}
\end{aligned}$$

$(-1)^r$\{全顶点循环 D_r 的积\}的 r 是顺向回路的个数。因而在 D_r 中，若信号流图的回路数为 k，则余下的 $r-k$ 个回路就是自环[-1]。因此，

$(-1)^r$\{全顶点循环 D_r 的积\}

$$=(-1)^{r-k}\{(-1)^k\cdot(\text{信号流图中无公共顶点的 } k \text{ 个顺向回路})\}$$

$$\times\overbrace{[-1][-1]\cdots[-1]}^{r-k}=(-1)^k(\text{信号流图中无公共顶点的 } k \text{ 个顺向回路})$$

上例中，$(-1)^3[(1)(4)][-1][-1]=(-1)[(1)(4)]$，$(-1)^3[(1)(4)][8][-1]=(-1)^2[(1)(4)][8]$ 等就是很好的例

子。在这个$(-1)^r${全顶点循环 D_r 的积}之中，有仅由自环(-1)组成的因子，据上式应为1。因此，上述例中的 D 只用信号流图的顺向回路表示时则为

$$
\begin{aligned}
D=&(-1)^4[-1][-1][-1][-1]+(-1)^3[(1)(4)][-1][-1]\\
&+(-1)^3[(2)(6)][-1][-1]+(-1)^4[8][-1][-1][-1]\\
&+(-1)^2[(2)(4)(7)][-1]+(-1)^3[(1)(4)][8][-1]\\
=&1-[(1)(4)]-[(2)(6)]-[8]-[(2)(4)(7)]\\
&+[(1)(4)][8]
\end{aligned}
$$

因此可以理解为

$$D=1-\sum L_1+\sum L_2-\cdots+(-1)^m\sum L_m+\cdots$$

然后，再由在 G_s 中除去了自环的图（即在信号流图上增加了边 K 的图）求含有边 K 的全顶点循环 D_s 的积。该值取决于此图中包含 K 而且无公共顶点的顺向回路，为 $1-\sum L_1(K)+\sum L_2(K)-\cdots+(-1)^m\sum L_m(K)$。$L_s(K)$表示它是含有边$K$的回路。在回路中除去边 K 时，从输入变量顶点出发，进入输出变量顶点的顺向路径设为 P_j。从 L_s 去除此 P_j，余下部分为将 P_j 的顶点和与这些顶点相连的边全部去除后的图 $G(\overline{P_j})$ 的 L_{s-1}。因此 E 为

$$E=-\sum P_j\{G(\overline{P_j})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}$$

在上例中，KE 为

$$
\begin{aligned}
KE=&(-1)^3[(K)(3)][-1][-1]\\
&+(-1)^3[(K)(3)][8][-1]\\
&+(-1)^2[(K)(2)(9)][-1]=(-1)[(K)(3)]\\
&+(-1)^2[(K)(3)][8]+(-1)[(K)(2)(9)]
\end{aligned}
$$

$$E=-[(3)\{1-[8]\}+(2)(9)\{1\}]$$

因此，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}$ 的行列式为

$$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}|=(-1)^n\{[1-\sum L_1+\sum L_2\cdots]-K\sum P_j[G(\overline{P_j})\text{的}$$

$(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)]\}$

为使方程$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})\boldsymbol{X}=0$具有$\boldsymbol{X}=0$以外的解，必须是$|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}|=0$*1，这就是

$$[1-\sum L_1+\sum L_2\cdots]-K[\sum P_j\{G(\overline{P_j})\text{的 }1-\sum L_1+\sum L_2\cdots\}]=0$$

因此

$$\frac{1}{K}=\frac{\sum P_j\{G(\overline{P_j})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}}{1-\sum L_1+\sum L_2\cdots}$$

此$1/K$是输出变量x_1和输入变量x_4的比。因此得到梅森公式。

[例题] 1　利用梅森公式式(7.4)从图7.5(a)的信号流图G求x_2/x_3。

[解答]　G中存在着自环$[a_{11}]$，它是唯一的一个顺向回路，因而式(7.4)的分母是$1-\sum L_1+\sum L_2\cdots=1-a_{11}$。

从节点x_3到顶点x_2的顺向路径是$P_1=(a_{23})$和$P_2=(a_{13},a_{21})$。$G(\overline{P_1})$是将P_1的顶点x_3和x_2以及与它们相连接的边a_{13}，a_{21}，a_{23}从G中去掉后的图，由顶点x_1和自环$[a_{11}]$组成。因此，$G(\overline{P_1})$的$(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$为$1-a_{11}$。将$P_2$的顶点$x_1$，$x_2$，$x_3$和与它们相连接的边从$G$中去掉时，成为$G(\overline{P_2})$，它是什么也没有的(空)图。因此$G(\overline{P_2})$的$(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$是1。

所以

$$\frac{x_2}{x_3}=\frac{a_{23}\{1-a_{11}\}+a_{13}a_{21}\{1\}}{1-a_{11}}$$

[例题] 2　利用梅森公式从下列联立方程式求x_1/x_4。

$$x_1=2x_1+3x_2+4x_3-2x_4$$

---

*1　参看附录的定理 14。

$$x_2 = x_1 - x_2 + 5x_4$$

$$x_3 = 6x_1 - 3x_3 - 4x_4$$

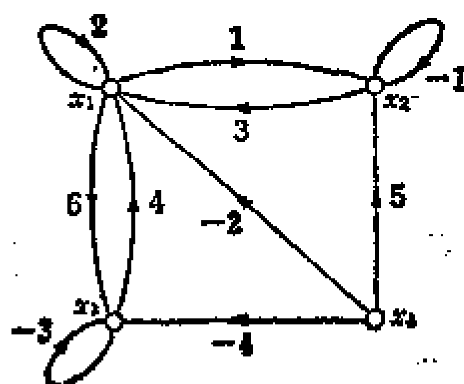


图 7.13 信号流图 G

［解答］ 首先，由上列联立方程式得图 7.13 信号流图 G。在这个 G 中有五个顺向回路，为

L_1：［2］,［-3］,［-1］,

［(1),(3)］,［(4),(6)］

无公共节点的两个顺向回路为

L_2：［2］［-1］,［2］［-3］,

［-1］［-3］,［(1)(3)］［-3］,

［(4)(6)］［-1］

无公共节点的三个顺向回路的集合为

L_3：［2］［-3］［-1］

无公共顶点的四个以上的顺向回路的集合不存在。因而式（7.4）的分母为

$$\begin{aligned}
&1-\sum L_1+\sum L_2-\sum L_3\cdots \\
&=1-[2]-[-3]-[-1]-[(1)(3)]-[(4)(6)] \\
&\quad+[2][-1]+[2][-3]+[-1][-3] \\
&\quad+[(1)(3)][-3]+[(4)(6)][-1] \\
&\quad-[2][-3][-1]=-68
\end{aligned}$$

从节点 x_4 到 x_1 的顺向路径为 $P_1=(-2)$，$P_2=((5),(3))$ 和 $P_3=((-4),(4))$ 三个。$G(\overline{P_1})$ 为将 P_1 的顶点 x_4 和 x_1 以及与它们相连接的边 (-4)，(-2)，(5)，(4)，(6)，(3)，(1)，(2) 从 G 中去掉的图［图 7.14(a)］。该 $G(\overline{P_1})$ 的

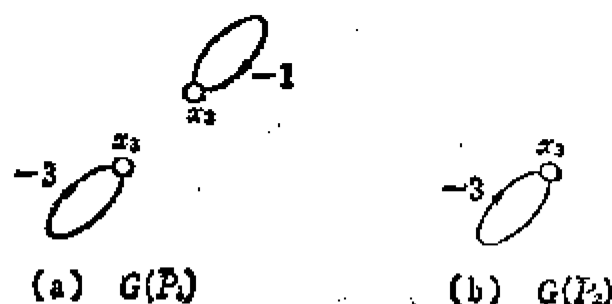


图 7.14 $G(\overline{P_1})$ 和 $G(\overline{P_2})$

$(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$为$1-[-3]-[-1]+[-3][-1]$。同样，$G(\overline{P_2})$为图7.14(b)的图。它的$(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$为$1-[-3]$。最后，$G(\overline{P_3})$是顶点$x_2$的自环$[-1]$，它的$(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$是$1-[-1]$。因此式(7.4)的分子为

$$\sum P_i\{G(\overline{P_i})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}$$
$$=(-2)\{1-[-3]-[-1]+[-3][1]\}$$
$$+((5)(3))\{1-[-3]\}+((-4)(4))\{1-[-1]\}$$
$$=12$$

所以

$$x_1/x_4=12/(-68)$$

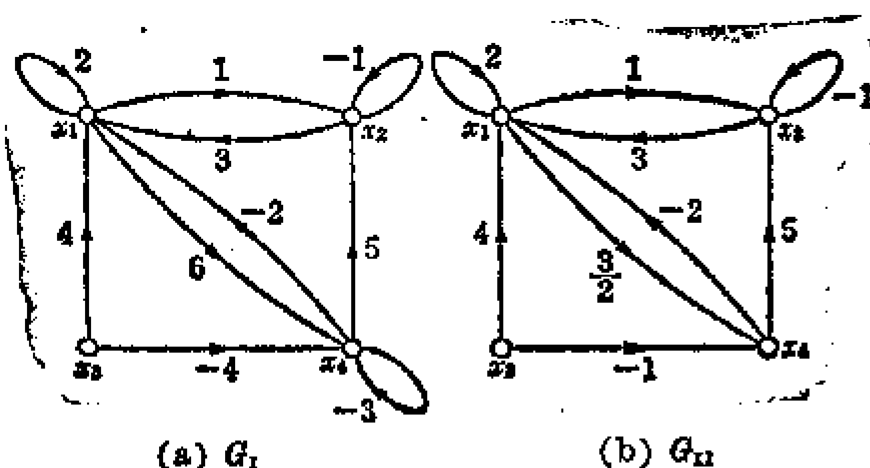
[例题] 3　利用信号流图由例题1的方程式求x_1/x_3。

[解答]　因为x_3作为输入变量，x_3不得出现在联立方程式的左侧。这是因为“连接在输入变量的顶点上的边，必须成为从该顶点发出的边”。为此，第三方程式$x_3=6x_1-3x_3-4x_4$变为下式即可。

$$\text{(I)}\ x_4=6x_1-4x_3-3x_4$$

或

$$\text{(II)}\ x_4=\frac{3}{2}x_1-x_3$$



(a) G_I　　(b) G_{II}

图7.15　信号流图

对应于(I)，联立方程式的信号流图如图7.15(a)。另外，对应于(II)的如图(b)。显然，图(a)中将图的顶点 x_4 的自环去掉时，就成了图(b)的图。

我们试利用(I)情况下的信号流图 G_1 计算 x_1/x_3。当从 G_1 探求 L_1, L_2, L_3 时，为

L_1: [2],[−1],[−3],[(1)(3)],[(−2),(6)],
[(5),(3),(6)]

L_2: [2][−1],[2][−3],[−1][−3],[(1),(3)][−3],
[(−2),(6)][−1]

L_3: [2][−1][−3]

图7.16 G的 $G(\overline{P_1})$ 和 $G(\overline{P_2})$

因此，式(7.4)的分母为

$$(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)=-86。$$

从顶点 x_3 到顶点 x_1 的顺向路径是 $P_1=(4)$，$P_2=((-4),(-2))$，$P_3=((-4)(5)(3))$。$G(\overline{P_1})$ 的图如图7.16(a)。因而

$$G(\overline{P_1})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$$
$$=1-[-1]-[-3]+[-1][-3]=8$$

根据图7.16(b)的 $G(\overline{P_2})$ 同样可得

$$G(\overline{P_2})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$$
$$=1-[-1]=2$$

$G(\overline{P_3})$ 是空图，所以

$$G(\overline{P_3})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)=1$$

由以上可得式(7.4)的分子为

$$\sum P_i\{G(\overline{P_i})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}$$
$$=(4)\{8\}+((-4)(-2))\{2\}+((-4)(5)(3))\{1\}$$
$$=-12$$

結果所得解为 $x_1/x_8=-12/(-86)$。

其次，我们试利用图 7.15(b)的信号流图 G_{II} 求解。

L_1: $[2],[-1],[(1),(3)],\left[(-2),\left(\frac{3}{2}\right)\right],$

$\left[(5),(3),\left(\frac{3}{2}\right)\right]$

L_2: $[2][-1],\left[(-2),\left(\frac{3}{2}\right)\right][-1]$

L_3: ϕ(不存在)

因此，式(7.4) 的分母为 $1-\sum L_1+\sum L_2\cdots=-43/2$。从顶点 x_8 到顶点 x_1 的顺向路径为 $P_1=(4)$， $P_2=((-1),\ (-2))$，$P_3=((-1),(5),(3))$，因而式(7.4)的分子为下式的值：

$$\sum P_i\{G(P_i)\text{的}\overline{(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)}\}$$
$$=(4)\{1-[-1]\}+((-1)(-2))\{1-(-1)\}$$
$$+((-1)(5)(3))\{1\}=-3$$

因此得 $$x_1/x_8=-3/(-43/2)$$

7.4 在控制系统方面的应用

为了表示控制系统，常使用关于状态方程式的微分[*1]

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\boldsymbol{AX}(t)+\boldsymbol{BE}(t) \tag{7.5}$$

当 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是常数矩阵时，该式用拉普拉斯变换改写成

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{AX}(s)+\boldsymbol{BE}(s) \tag{7.6}$$

---

*1 若状态变量为 n 个，$\dot{\boldsymbol{X}}(t)$意味着 $\dot{\boldsymbol{X}}(t)=\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\\vdots\\x_n(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{dx_1(t)}{dt}\\\frac{dx_2(t)}{dt}\\\vdots\\\frac{dx_n(t)}{dt}\end{bmatrix}$

假定 $\boldsymbol{X}(0)=0$，并设 $s=\dfrac{1}{\zeta}$，式(7.6)便成为

$$\boldsymbol{X}=\zeta\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\zeta\boldsymbol{B}\boldsymbol{E} \tag{7.7}$$

由该式可以得到信号流图，因此可应用前述的根据信号流图求解联立方程的方法。例如，由状态方程式

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\\ \dot{x}_5(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\\ x_5(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\\ 0\\ 0\\ 0\\ 9\end{bmatrix}e_1(t)$$

得

$$s\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\\ x_3(s)\\ x_4(s)\\ x_5(s)\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\\ x_3(0)\\ x_4(0)\\ x_5(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 7 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(s)\\ x_2(s)\\ x_3(s)\\ x_4(s)\\ x_5(s)\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}9\\ 0\\ 0\\ 0\\ 9\end{bmatrix}e_1(s)$$

在此，设 $s=\dfrac{1}{\zeta}$，并假定 $\boldsymbol{X}(0)=0$，则得

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \zeta & 0 & 0\\ 6\zeta & 0 & 0 & 0 & 0\\ 7\zeta & -\zeta & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3\zeta & 0 & 0 & 2\zeta\\ 0 & 0 & 4\zeta & 8\zeta & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}9\zeta\\ 0\\ 0\\ 0\\ 9\zeta\end{bmatrix}e_1$$

由此得图 7.17 的信号流图 G_f。

现研究系统的特征值和信号流图 G_t 的关系。当 A 为 $n\times n$ 的常数矩阵时，

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{U}|=\lambda^n|\zeta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}|_{\zeta=\frac{1}{\lambda}}=0$$

因此

$$\lambda^n|\zeta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}|_{\zeta=\frac{1}{\lambda}}=0$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程式。

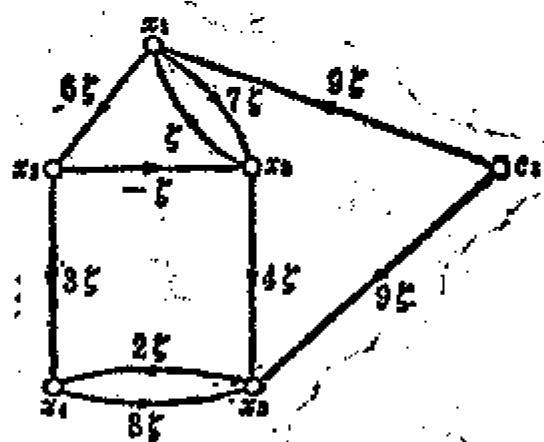


图 7.17　信号流图 G_t

我们来分析将 $(\zeta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U})$ 的转置矩阵作为连接矩阵的图 G_c。若从信号流图 G_t 中去掉对应于 $\zeta\boldsymbol{BE}$ 的子图以后的图为 $G(\overline{E})$，则图 G_c 就是在 $G(\overline{E})$ 的全部顶点处加上了自环 (-1) 的图。由式(6.3)得

$$|\zeta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}|=(-1)^n\sum(-1)^m(G_c\text{ 的全节点循环 }D_m\text{ 的积})$$

因为自环 (-1) 在任何顶点都有，用与导出梅森公式分母的相同方法，得

$$|\zeta\boldsymbol{A}-\boldsymbol{U}|=(-1)^n\{G(\overline{E})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}$$

用 λ^n 乘之，并设 $\zeta=\dfrac{1}{\lambda}$，得

$$\lambda^n|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{U}|=(-1)^n\lambda^n\{G(\overline{E})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}_{\zeta=\frac{1}{\lambda}}$$

无论选取作为 E 的元素的哪个输入变量 e_i，它的顶点也不会包含在顺向回路中。因而，$G(\overline{E})$ 的 $(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$ 与信号流图 G_t 的 $1-\sum L_1+\sum L_2\cdots$ 相同，因此

$$\lambda^n\{G_t\text{ 的 }1-\sum L_1+\sum L_2\cdots\}_{\zeta=\frac{1}{\lambda}}=0 \tag{7.8}$$

是特征方程式。应该注意，数 n 是变量 x 的个数，不包含变量 e 的个数。

［例题］1　从图 7.17 的信号流图 G_t 求特征方程式。

［解答］　由 G_t，$n=5$。顺向回路是［(ζ)，(7ζ)］，［(6ζ)，$(-\zeta)$，

(ζ)] 和 [$(2\zeta),(8\zeta)$]。因此

$$
\begin{aligned}
&G_t \text{ 的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\\
&=1-[(\zeta)(7\zeta)]-[(6\zeta)(-\zeta)(\zeta)]-[(2\zeta)(8\zeta)]\\
&\quad+[(\zeta)(7\zeta)][(2\zeta)(8\zeta)]+[(6\zeta)(-\zeta)(\zeta)][(2\zeta)(8\zeta)]\\
&=1-23\zeta^2+6\zeta^3+112\zeta^4-96\zeta^5
\end{aligned}
$$

据式(7.8)

$$
\begin{aligned}
&\lambda^5\left\{1-23\frac{1}{\lambda^2}+6\frac{1}{\lambda^3}+112\frac{1}{\lambda^4}-96\frac{1}{\lambda^5}\right\}\\
&=\lambda^5-23\lambda^3+6\lambda^2+112\lambda-96=0
\end{aligned}
$$

是特征方程式。

[**MSC(最大强连通)子图**]

假如求得式(7.8)的根,实际上就得出了系统的特征值。而在信号流图具有两个以上被称作 MSC 的特殊子图的情况下，可更简便地求出特征值。现说明之。

MSC 图,是**最大强连通子图**(maximally strongly connected subgraph)的简称。所谓强连通的强，是任何边都归入顺向回路的情况下所用的术语。即使是一个顶点，当不存在含有该顶点的顺向回路时，也成为 MSC 图。例如，看一下含有图 7.17 G_t 的边(7ζ)的 MSC 图 G_1。G_1 必须包含边(ζ)，原因是边(ζ)和边(7ζ)组成顺向回路。由于边(ζ)和边(6ζ)，$(-\zeta)$组成顺向回路，所以它们也必须包含在 G_1 中。此外，再没有包含这些边的顺向回路。因而，G_t 应由边(ζ)，(7ζ)，(6ζ)和$(-\zeta)$组成。顶点 e_1 自身就是 MSC 图。又,G_t 中还有 MSC 图 G_3，它们如图 7.18 所示。

利用 MSC 图求特征值较为容易,方法如下。在由式(7.7)所作的信号流图 G_t 中，$(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$与作为$E$的元素的输入

变量的顶点无关，这是已經说明了的道理。因此，在MSC图中，设去掉含有输入变量的顶点后的剩余部分为 G_1，$G_2,\cdots,G_m$，换言之，设 G_t 的MSC图为由$G_1,G_2,\cdots,G_m$和输入变量顶点组成的MSC图，G_t 的顺向回路就必然由只属于一个MSC图的边组成。因此可知

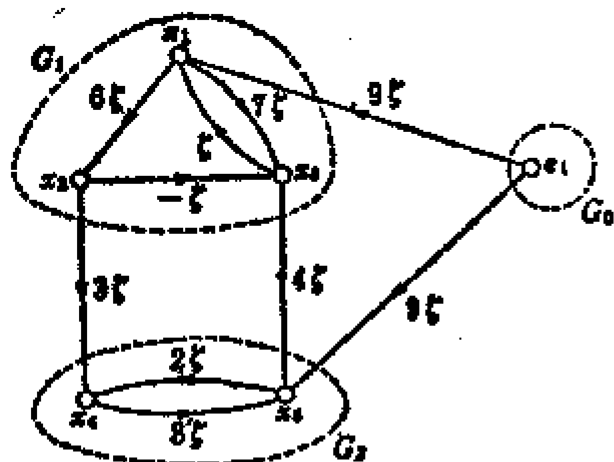


图 7.18　MSC 图 G_0, G_1, G_2

$$G_t\text{ 的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)$$
$$=\prod_{r=1}^{n}\{G_r\text{ 的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\} \tag{7.9}$$

作为

$$\lambda^n\{G_t\text{ 的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}_{\zeta=\frac{1}{\lambda}}=0$$

的根的 G_t 的特征值，是各个

$$\lambda^{n_r}\{G_r\text{ 的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}_{\zeta=\frac{1}{\lambda}}=0 \tag{7.10}$$

的根(注，n_r 是 G_r 的顶点数)。即，为求 G_t 的特征值，只要逐个求它的 MSC 图 G_r 的特征值即可。

［例题］2　求图 7.17 的信号流图 G_t 的特征值。

［解答］　正如图 7.18 所示，在 G_t 的 MSC 图中，G_1 和 G_2 是不含输入变量的顶点的图。G_1 的特征值是方程

$$\lambda^3\{G_1\text{ 的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}_{\zeta=\frac{1}{\lambda}}$$
$$=\lambda^3\{1-7\zeta^2+6\zeta^3\}_{\zeta=\frac{1}{\lambda}}$$
$$=\lambda^3-7\lambda+6=0$$

的根 $\lambda=1,2,-3$。G_2 的特征值是方程

$$\lambda^2\{G_2\text{ 的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}_{\zeta=\frac{1}{\lambda}}$$
$$=\lambda^2\{1-16\zeta\}_{\zeta=\frac{1}{\lambda}}=\lambda^2-16=0$$

的根 $\lambda=\pm 4$。因此 G_t 的特征值是 $\lambda=1, 2, -3, \pm 4$。

利用梅森公式(7.4)式，作为E的元素的输入变量 e_i 和X的元素的变量 x_j 的关系是

$$\frac{x_j(\zeta)}{e_i(\zeta)}=\frac{\sum P_{ij}\{G_t(\overline{P}_{ij})\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)\}}{G_t\text{的}(1-\sum L_1+\sum L_2\cdots)}$$

该式可用 G_t 的 MSC 图简化。请读者自学之。

习　题

［1］ 求下列联立方程的信号流图。

(a) $x_1=a_1x_1+a_2x_2+a_5x_5$
$x_2=b_1x_1+b_2x_2+b_5x_5$
$x_3=c_2x_2+c_4x_4$
$x_4=d_4x_4+d_5x_5$

(b) $x_1=x_2+2x_3$
$x_2=3x_1+4x_5$
$x_3=-2x_1-3x_2-x_5$

(c) $x_1=-x_1+2x_4$
$x_2=4x_1+3x_2$
$x_3=6x_2+5x_3$
$x_4=8x_3+7x_4+9x_5$

［2］ 用化简信号流图的方法求第1题的联立方程的 x_1/x_5。

［3］ 用梅森公式求第1题联立方程的 x_1/x_5。

［4］ 用化简图的方法从图7.19的信号流图求 x_1/x_5。

［5］ 用梅森公式从图7.19的信号流图求 x_1/x_5。

［6］ 用梅森公式求第1题的联立方程的 x_1/x_3。

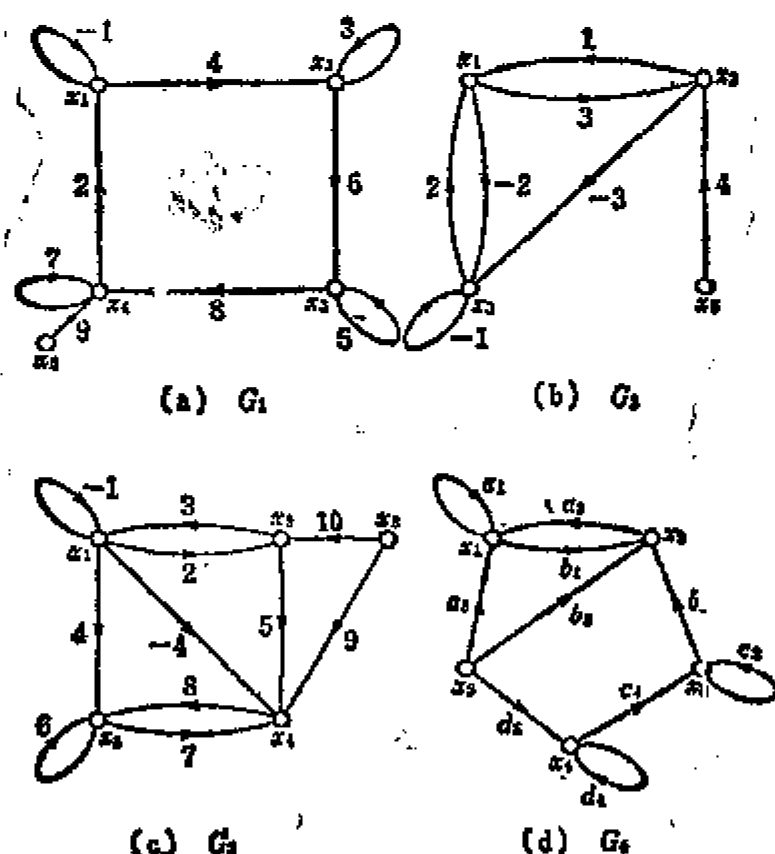
［7］ 从下列状态空间方程式求信号流图。

(a) $\dot{x}_1=a_1x_1+a_2x_2+a_5e$
$\dot{x}_2=b_1x_1+b_2x_2+b_5e$
$\dot{x}_3=c_2x_2+c_4x_4$
$\dot{x}_4=d_4x_4+d_5e$

(b) $\dot{x}_1=x_2+2x_3$
$\dot{x}_2=3x_1+4e$
$\dot{x}_3=-x_1-2x_2-3x_3$

(c) $\dot{x}_1=-x_1+2x_4$
$\dot{x}_2=4x_1+3x_2$
$\dot{x}_3=6x_2+5x_3$
$\dot{x}_4=8x_3+7x_4+9e$

(d) $\dot{x}_1=-x_1+3x_2$
$\dot{x}_2=2x_1+10e$
$\dot{x}_3=4x_1+6x_3+8x_4$
$\dot{x}_4=-4x_1+5x_2+7x_3+9x_5$
$\dot{x}_5=e$



(a) G_1　　(b) G_2

(c) G_3　　(d) G_4

图 7.19　信号流图

[8]　根据第[7]题各状态空间方程式所作的信号流图，求其特征值。

参 考 文 献*

1) S. J. Mason: Feedback Theory; Some Properties of Siganl-Flow Graphs, Proc. IRE, 41 (1953), p. 1144—1156
2) S. J. Mason: Feedback Theory; Further Properties of Siganl-Flow Graphs, Proc. IRE, 44 (1956), p. 920—926
3) C. L. Coates: General Topological Formulas for Linear Network Functions, IRE Trans., CT-5 (1958), p. 30—42
4) C. L. Coates: Flow-Graph Solutions of Linear Algebraic Equations, IRE Trans., CT-6 (1959), p. 170—187
5) J. G. Truxal: Automatic Feedback Control System Synthesis, McGraw-Hill, New York (1955),尤其是第 2 章
6) S. Seshu & M. B. Reed: Linear Graphs and Electrical Networks,

* 本章与上章的参考文献相同。

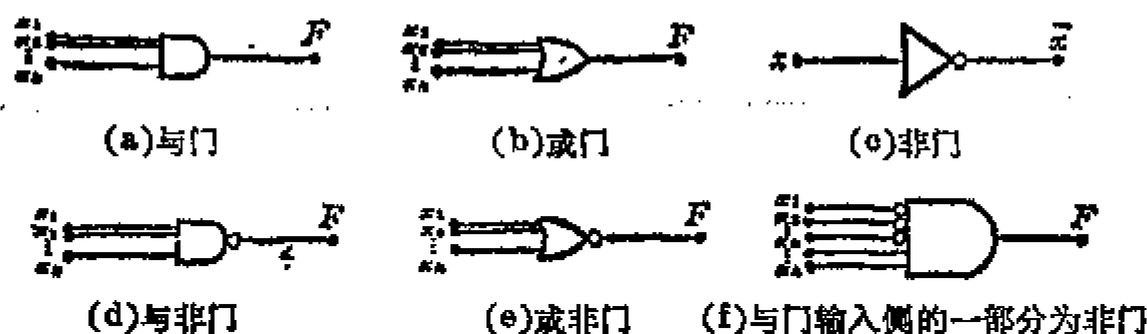
Addison-Wesley (1961)
7) W. H. Kim & R. T. Chien: Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia University Press (1962)
8) ロビショー,他著・勝田,他訳: シグナルフローグラフとその応用,ラテイス社(1967)
9) W. Mayeda: Graph Theory, Wiley-Interscience (1972)

第八章　在逻辑电路方面的应用

【要点】 以上各章中，边的权是重要的。而本章用图来表示逻辑电路是重视顶点的权的例子。本章研究通过求特殊的子图来分析逻辑电路的方法[*1]。

8.1 逻辑元件

用于逻辑电路中的门有各种各样类别，典型的是与门、或门、非门、与非门、或非门。



(a)与门　(b)或门　(c)非门

(d)与非门　(e)或非门　(f)与门输入侧的一部分为非门

图8.1　逻辑电路的门

在图 8.1(a)的与门中，输入变量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 与输出函数 F 的关系表示为

$$F = x_1 x_2 \cdots x_k \tag{8.1}$$

该式表明，仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 1$ 时，输出侧才为 1。

图 8.1(b)称为或门，输入侧与输出侧的关系为

$$F = x_1 + x_2 + \cdots + x_k \tag{8.2}$$

换言之，只要输入变量 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 中任何一个为 1，在输出侧就

---

*1　本章中所运用的布尔代数，请参看附录 8。

输出 1，这就是或门。

图 8.1(c)称为非门(反相器)，输出侧是输入变量的补码（否定）。即如果输入侧输入 1，则输出侧为 0；如果输入侧输入 0，则输出侧输出 1。

在与门的输出侧加上非门成为图 8.1(d)，称为与非门，它的输出函数F为

$$F=\overline{x_1x_2\cdots x_k} \tag{8.3}$$

在或门的输出侧加上非门成为图 8.1(e)，称为或非门，它的输出函数F为

$$F=\overline{x_1+x_2+\cdots+x_k} \tag{8.4}$$

另外，如图 8.1(f) 那样，是在与门输入侧的一部分加上非门而成，此时可知，输出函数F为

$$F=\bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_hx_{h+1}\cdots x_k \tag{8.5}$$

图 8.2 是由这些门构成的逻辑电路，x 和 y 是输入变量，F是输出函数。与门 g_1 的输出函数为 $x\bar{y}$，与门 g_2 的输出函数为 $\bar{x}y$，因为它们变成了或门 g_3 的输入变量，所以输出函数F为

$$F=x\bar{y}+\bar{x}y \tag{8.6}$$

图 8.2 的逻辑电路的给定顶点 x 和 y，称为输入端。输出函数F的给定顶点称为输出端。

试求图 8.3 逻辑电路的输出函数 F。与门 g_1 的输出为 xyz，它和 x 通过非门后的 $\bar{x}$ 作为或门 g_2 的输入，因而 g_2 的输出为 $xyz+\bar{x}$。或门 g_3 的输出 $x+\bar{z}$，它和 g_2 的输出成为与门 g_4 的输

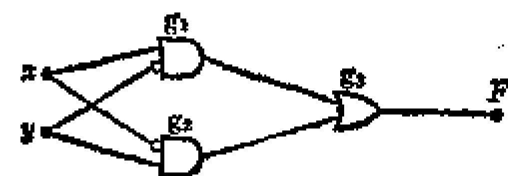


图 8.2　逻辑电路

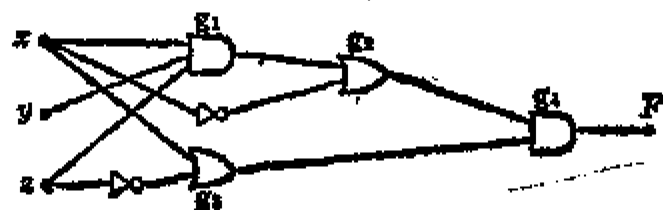


图 8.3　逻辑电路

入，因而输出函数 F 为

$$F=(xyz+\bar{x})(x+\bar{z}) \tag{8.7}$$

上式展开成

$$\begin{aligned}F&=xyzx+xyz\bar{z}+\bar{x}x+\bar{x}\bar{z}\\&=xyz+\bar{x}\bar{z}\end{aligned} \tag{8.8}$$

在图 8.4 的逻辑电路中，xyz 是与门 g_1 的输出，又 $\bar{x}\bar{z}$ 是与门 g_2 的输出，它们都是或门 g_3 的输入，因此图 8.4 逻辑电路的输出函数与图 8.3 逻辑电路的输出函数相同。即图 8.3 的逻辑电路与图 8.4 的逻辑电路具有相同的输出函数。

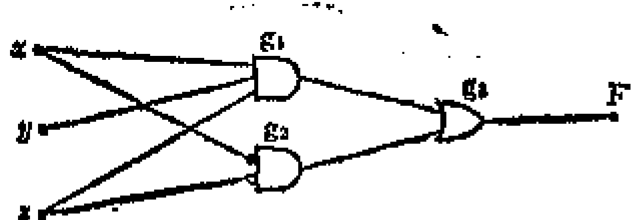


图 8.4　逻辑电路

8.2　1-网和 0-网

若把逻辑电路的输入端、输出端以及门当作顶点来考虑，表示它们之间连接关系的线变作有向边，逻辑电路就成为有向图。顶点表示为门时，进入它的边称为输入边，从它出去的边称为输出边。例如图 8.5 中，和顶点 g_1 有关的边 a, b, c 中，a 和 b 是 g_1 的输入边，边 c 是 g_1 的输出边；边 a 也是 g_3 的输出边；顶点 g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 和 g_6 用门的形式画出，它们也可以画作普通的顶点并可在其处标注与门和或门。

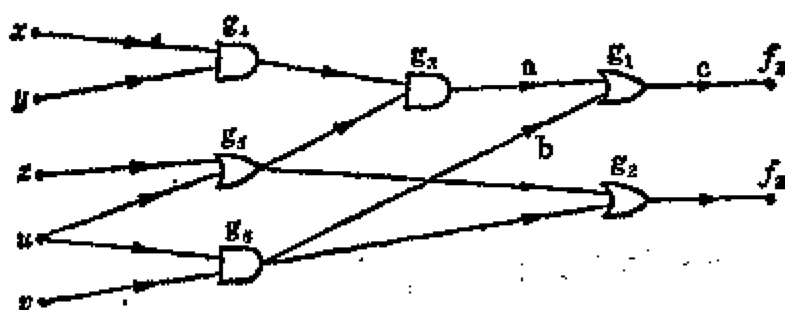


图 8.5　逻辑电路作为有向图 G

为了求顶点 f_1 的输出函数 F_1，如下所述，逐个求出各门输出

端的输出函数。首先，与门 g_4 的输出端为 xy，或门 g_5 的输出端为 $z+u$，它们成了与门 g_3 的输入，因而 g_3 的输出为 $xy(z+u)$。它和与门 g_6 的输出 uv 成为或门 g_1 的输入，因此（顶点 f_1 的）输出函数 F_1 为

$$F_1 = xy(z+u) + uv \tag{8.9}$$

〔1〕 1-网

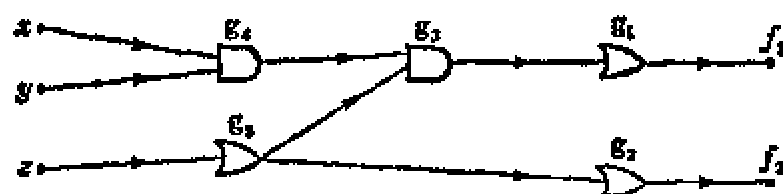
为了由图直接求式（8.9）的输出函数 F，我们定义特殊的子图——**1-网**。

设逻辑电路的有向图为G，选任意顶点 f。顶点 f 的**1-网** $\boldsymbol{M}$ 是 G 的子图，它满足下列条件：

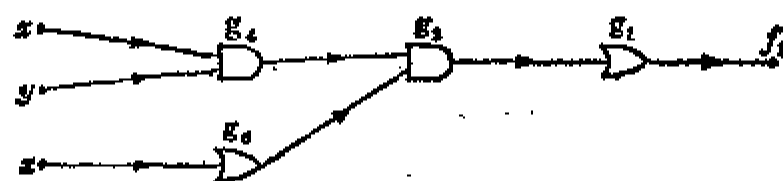
（1） M是包含顶点 f 的连通图。M的任何与门，其输入侧的全部边都包含在M中；M的任何或门，其输入侧的边仅有一条包含在M中。

（2） M的任何真子图都不满足条件（1）。

举例说明 1-网。图 8.5 中图G的子图 G_1 示于图 8.6(a)。设所选的顶点为 f_1。G_1 的与门 g_4 的输入边和G中的与门 g_4 的输入边相同；同样，G_1 的与门 g_3 的输入边和G中的 g_3 的输入边相



(a)子图 G_1



(b)子图 M_1（1-网）

图 8.6 子图

同；因此，对于 G_1 的与门满足条件(1)。G_1 中，有三个或门，在任何一个门的输入侧只有一条边，也满足条件(1)中的或门条件。顶点 f_1 在 G_1 之内。由此可得到结论，G_1 满足条件(1)。进一步研究图 8.6(b)的图 M_1，它也能满足条件(1)。该图 M_1 是 G_1 的真子图。因此，G_1 不满足条件(2)，所以 G_1 不是顶点 f_1 的 1-网。去掉 M_1 的任何部分就不能满足条件(1)，因而 M_1 满足条件(2)。所以，图 M_1 是顶点 f_1 的 1-网。除此之外，在图 8.5 的 G 图中，顶点 f_1 的 1-网还有两个，它们如图 8.7 所示。

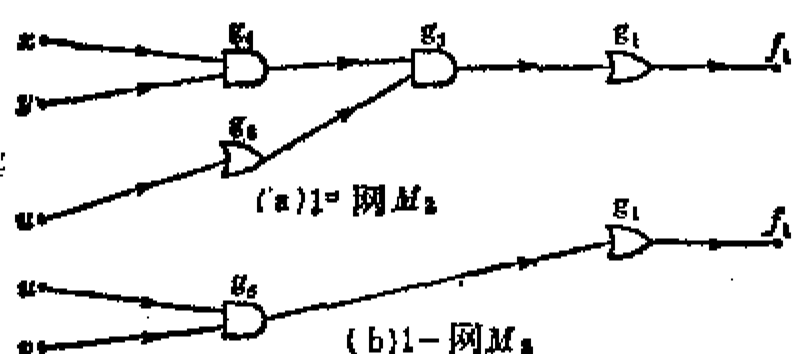


图 8.7　1-网 M_2 和 M_3

"1-网的量"，就是 1-网所含的输入端的变量之积。图 8.6(b)的 1-网 M_1 的量是 xyz。图 8.7 的 1-网 M_2 的量是 xyu。1-网 M_3 的量是 uv。下一小节说明 1-网的量和逻辑电路函数的关系。

[2] 输出函数 F 的拓扑公式

由与门和或门构成的逻辑电路 G 不包含顺向回路的情况下，输出端 f 的函数由下式表示：

$$F=\sum_{(r)}(\text{顶点 } f \text{ 的 1-网 } M_r \text{ 的量}) \tag{8.10}$$

上例图 8.5 的图 G 具有三个 f_1 的 1-网 M_1，M_2，M_3。因而由式(8.1)，节点 f_1 的输出函数 F_1 为

$$F_1=(1\text{-网 }M_1\text{ 的量})+(1\text{-网 }M_2\text{ 的量})$$
$$+(1\text{-网 }M_3\text{ 的量})$$
$$=xyz+xyu+uv$$

现简略说明式(8.10)是正确的。首先，设顶点 f_1 的1-网为 M_t，且 M_t 的量为 $x_1x_2\cdots x_k$。换言之，M_t 的输入端变量为 $x_1, x_2, \cdots, x_k$。给定的逻辑电路 G 仅由与门和或门构成，因此 M_t 也由与门和或门组成。M_t 的任何一个与门，其输入侧的全部边包含在 M_t 中。M_t 的任何一个或门，其输入侧的边仅有一个包含在 M_t 中。因此，当考虑 $x_1=x_2=\cdots=x_k=1$ 时，其输入侧连接着这些输入端的门的输出侧全部为1。同时，那些相应门的输出侧也为1，等等。最终，M_t 的输出端 f 为1。由于 M_t 是 G 的子图，当 $x_1=x_2=\cdots=x_k=1$ 时，G 的输出端 f 输出1。这是对顶点 f 的全部1-网而言的，$\sum_{(r)}$(顶点 f 的1-网 M_r 的量)应包含在顶点 f 的输出函数 F 中。下面，考虑与此相反的情况。

当变量和其补码，例如 x 和 $\bar{x}$ 成为输入变量时，F 的全部项中应包含 x 或 $\bar{x}$，这样的 F 应表示为

$$F=\sum_{(r)}F_r \tag{8.11}$$

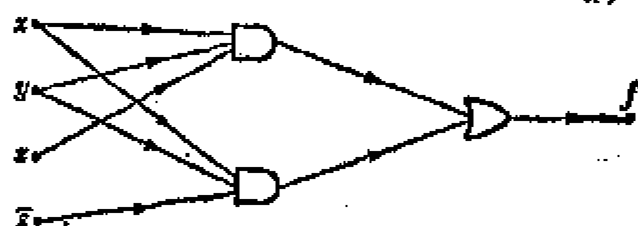


图8.8 逻辑电路 G

例如图8.8逻辑电路 G 的输出函数 F 是

$$F=xy \tag{8.12}$$

但由于 z 及其补码 $\bar{z}$ 也为输入变量，因此，F 的全部项中应包含 z 或 $\bar{z}$。这样，F 应表示为

$$F=xyz+xy\bar{z} \tag{8.13}$$

若这样表示的输出函数 F 的项 F_r 设为 $x_1x_2\cdots x_k$，在 $x_1=x_2=\cdots=x_k=1$，其他所有变量为0的情况下，输出端应输出1。这时门的输出侧输出1。设 G_1 为子图，它由全部门和变量是 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 的

输入端，传递 1 的边，输出端 f 所组或。当 $x_1=x_2=\cdots=x_k=1$时，G_1的全部门的输出侧输出 1 。因此，G_1的任何与门，其输入侧全部边包含在 G_1 中；G_1 的任何或门，它的输入侧的边必须至少有一条包含在 G_1 中。当然，顶点 f 也包含在 G_1 中。即 G_1 为包含着顶点 f 的 1-网。因为这可以对于F的任何项 F_r 而言，所以输出函数F应包含在 $\sum\limits_{(r)}$（顶点 f 的 1-网的量）中。于是得出结论：式(8.11)是正确的。

现介绍一下求 1-网的简单方法。为了画顶点 f 的 1-网，首先，(I)画顶点 f 和它的输入边及以此边为输出边的门。(II)若未画输入边的门为或门时，则画出它的一条输入边和以它为输出边的门或者输入端。若未画输入边的门是与门时，则画出它的全部输入边和以它们为输出边的门或者输入端。对于未画输入端的门，进行步骤II。

现在用上述方法，求图 8.5 逻辑电路的顶点 f_2 的 1-网。首先，按步骤 I，得图 8.9(a)。在此图中，未画输入边的门是或门 g_2，因而按步骤 II 得图 8.9(b)。g_5 未画输入边，因而按步骤 II 得图 8.9(c)，这就成为顶点 f_2 的 1-网。

若用上述方法已得到 1-网，只要改变 1-网中或

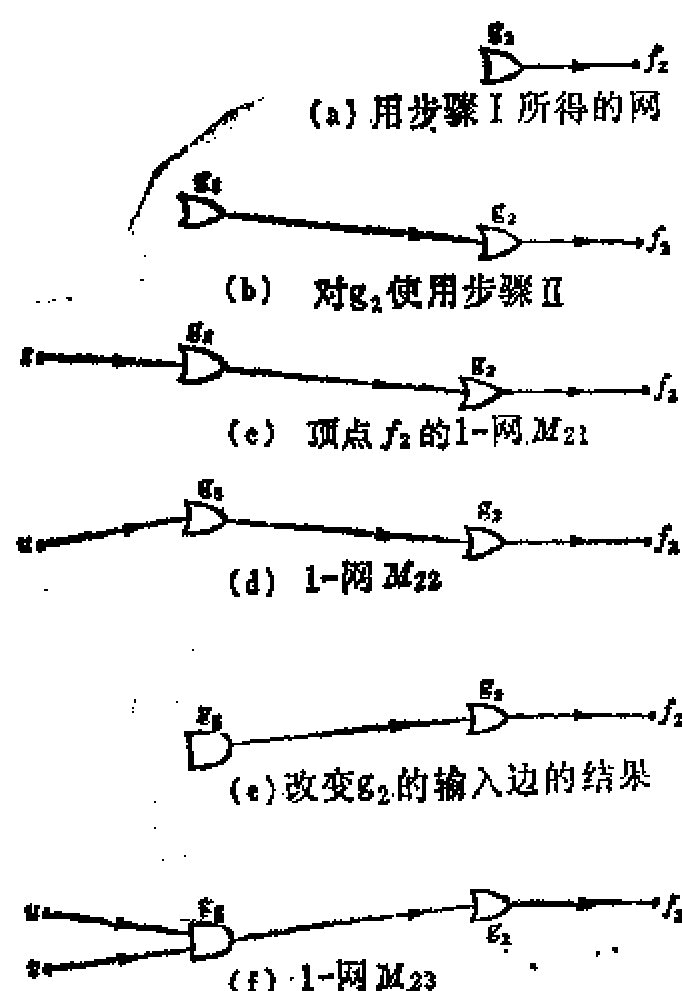


图 8.9 求 1-网的方法

门的输入边，用步骤 II 即可得新的1-网。当改变图 8.9(c)的门 g_5 的输入边时，就成图 8.9(d)，这也是顶点 f_2 的1-网。因为在或门 g_5 中除此之外没有输入边了，所以接着改变或门 g_2 的输入边，得到图 8.9(e)。在该图中存在着未画输入边的门 g_6，因而按步骤 II 得图8.9(f)。显然这是 f_2 的1-网。因此图 8.5 的顶点 f_2 的1-网已全部求出。由这三个1-网，根据式(8.10)可知，顶点 f_2 的输出函数 F_2 为

$$F_2 = z + u + uv = z + u$$

[3] 0-网

1-网是为了将1从输入端送到输出端所必需的最小子图，而下面定义的0-网是为了将0从输入端送到输出端的最小子图。

顶点 f 的0-网 N 是逻辑电路的子图，满足下列条件：

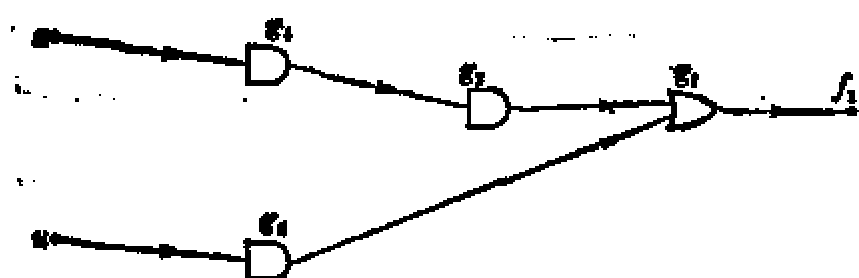
(1) N 是包含顶点 f 的连通子图。N 的任何与门，其输入侧的边仅有一条包含在 N 中；N 的任何或门，其输入侧的全部边都包含在 N 中。

(2) N 的任何真子图都不满足条件(1)。

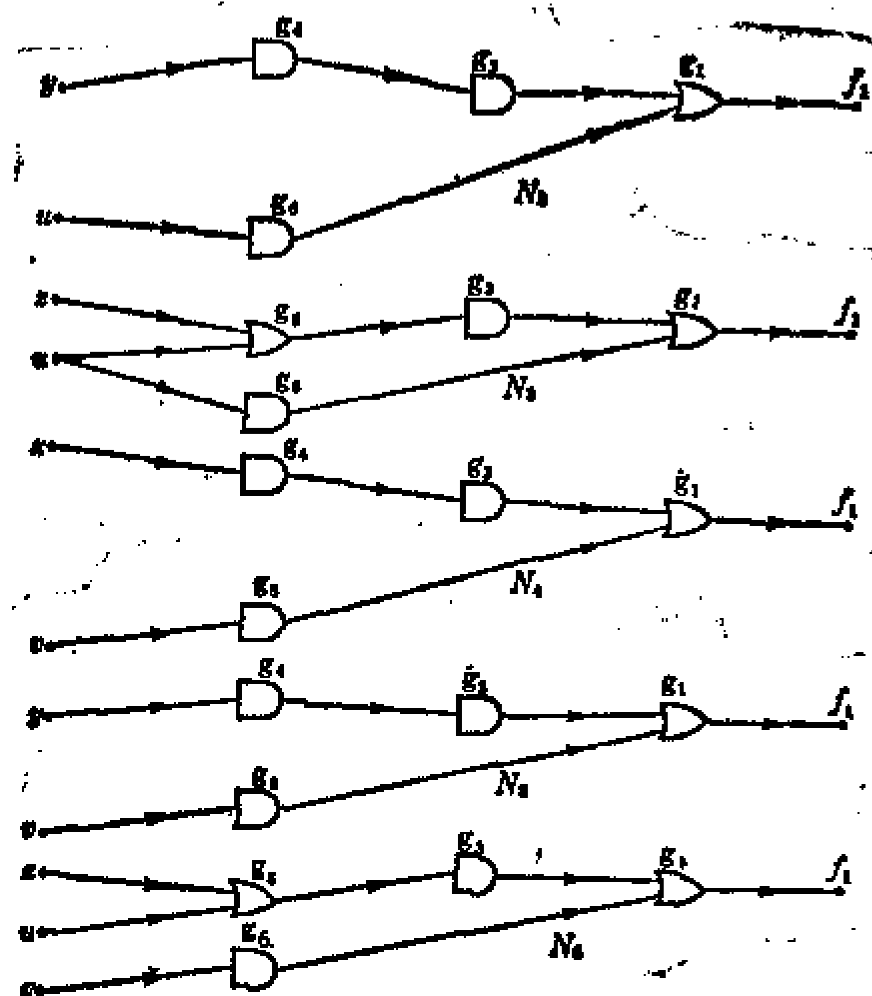
试求图 8.5 逻辑电路的顶点 f_1 的0-网。图 8.10(a) 的子图 N_1 是0-网吗？首先，N_1 包含顶点 f_1。N_1 中唯一的一个或门 g_1 的输入侧的边全部包含在 N_1 中。再看 N_1 三个与门的任何一个，输入侧只有一条边。由此可知，N_1 满足条件 1。

其次，只要去掉 N_1 的任何顶点或任何边，条件(1)就不满足，因而 N_1 满足条件(2)。因此 N_1 是顶点 f_1 的0-网。此外，顶点 f_1 的0-网还有五个，它们如图 8.10(b)所示。求0-网，用前述的求1-网相同的方法即可。但，步骤 II 中与门的情况，取一条输入边；或门的情况，必须取全部的输入边。

0-网的量，就是输入变量的补码之积。在上述例中，图8.10(a)



(a) 0-网 N_1



(b) 0-网 $N_2 \sim N_6$

图8.10 0-网

的0-网的量为 $x\bar{u}$，图 8.10(b)的 N_2 的量是 $y\bar{u}$。同样，N_3 的量为 $z\bar{u}$，N_4 的量为 $x\bar{v}$，N_5 的量为 $y\bar{v}$，因而 N_6 的量为 $z\bar{u}\bar{v}$。

顶点 f 的输出函数 F 是顶点 f 的1-网的量之和；而其输出函数 F 的补码 $\overline{F}$ 是顶点 f 的0-网的量之和。换言之，

输出函数补码 $\overline{F}$ 的拓扑公式是

$$\overline{F}=\sum_{(F)}(\text{顶点}f\text{的0-网}N_F\text{的量}) \qquad (8.14)$$

由于图8.10的0-网为N_1、N_2、N_3、N_4、N_5 N_6，据式(8.14)，顶点f_1的输出函数的补码$\overline{F}$为

$$\overline{F}=(N_1\text{的量})+(N_2\text{的量})+\cdots+(N_6\text{的量})$$

$$=\bar{x}\bar{u}+\bar{y}\bar{u}+\bar{z}\bar{u}+\bar{x}\bar{v}+\bar{y}\bar{v}+\bar{z}\bar{u}\bar{v}$$

$$=\bar{x}\bar{u}+\bar{y}\bar{u}+\bar{z}\bar{u}+\bar{x}\bar{v}+\bar{y}\bar{v}$$

8.3 逻辑电路的分析

如上所述，不包含顺向回路的逻辑电路由与门和或门组成时，其输出端的逻辑函数F或$\overline{F}$，可以通过式(8.10)或式(8.14)求特殊子图1-网或0-网而得到。

逻辑电路包含非门时，去掉非门就可以利用式(8.10)或式(8.14)。因此研究一下去掉非门的方法。

(a) 与非门　　(b) 输入侧有非门的或门

图8.11 与非门及其等效门

图8.11(a)是与非门，其输出函数F为

$$F=\overline{x_1x_2\cdots x_n}$$

$$=\bar{x}_1+\bar{x}_2+\cdots+\bar{x}_n \qquad (8.15)$$

此式的右方，是把$\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，…，$\bar{x}_n$作为或门输入侧，因此，只要将图(a)与非门输出侧的非门移至输入侧各边，把与门变为或门，便得出输出与输入的关系仍不变的逻辑电路，如图8.11(b)所示。换言之，将与门输出侧的非门去除的方法是：

法一：去掉与非门输出侧的非门，将与门变成或门，在全部输

入侧的边加上非门。

图 8.12(a)是或非门。它的输出侧的函数F为

(a) 或非门　　(b) 输入侧有非门的与门

图 8.12　或非门及其等效门

$$F=\overline{x_1+x_2+\cdots+x_k}=\bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_k \quad (8.16)$$

由该式右边可知，非门在或非门的输出侧和非门在与门的输入侧是相同的。因此，将或门输出侧的非门去掉的方法是：

法二：将或非门输出侧的非门去掉，在输入端的全部边加上非门，把该门变为与门。

如图 8.13(a)所示，当在输入端加上非门时，非门的输出侧是输入变量的补码。因此若像图 8.13(b) 那样，将输入变量变为补码即可。

(a) 输入端和非门　　(b) 变量x的补码

图 8.13　输入端及非门

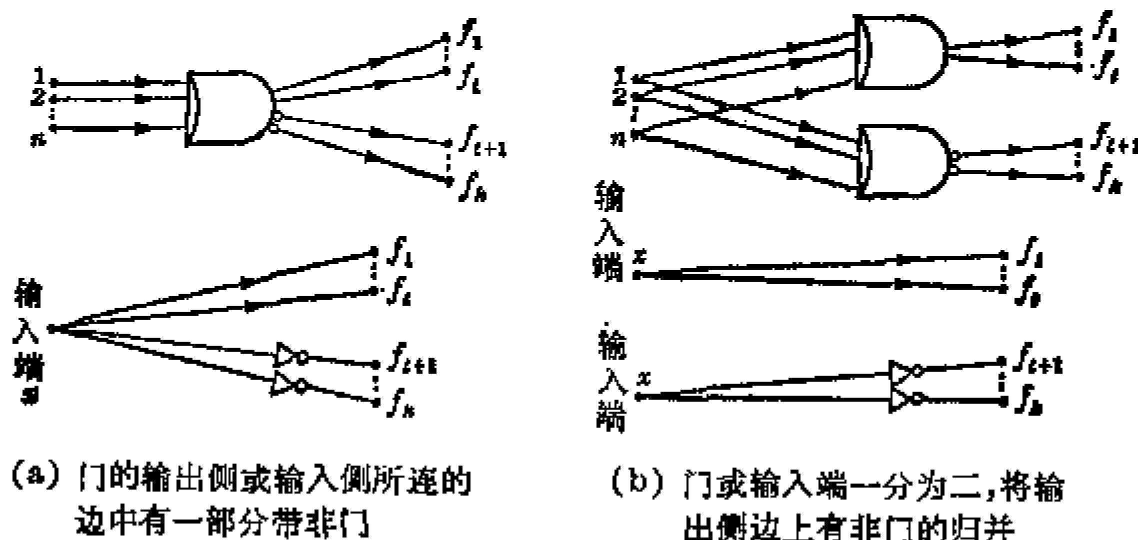
法三：要去掉输入端附加的非门，可将输入变量变为其补码。

最后，如图 8.14(a)那样的情况，门的输出侧或输入端所连的边中有一部分带非门，则方法如图 8.14(b)所示，即

法四：将门或端一分为二：只带非门的边所连的门或端，不带非门的门和端。

利用上述法一，法二，法三，法四四种变换，不含顺向回路的逻辑电路的非门可以全部去掉。

［例题］1　试用式(8.10)分析图 8.15(a)的逻辑电路。

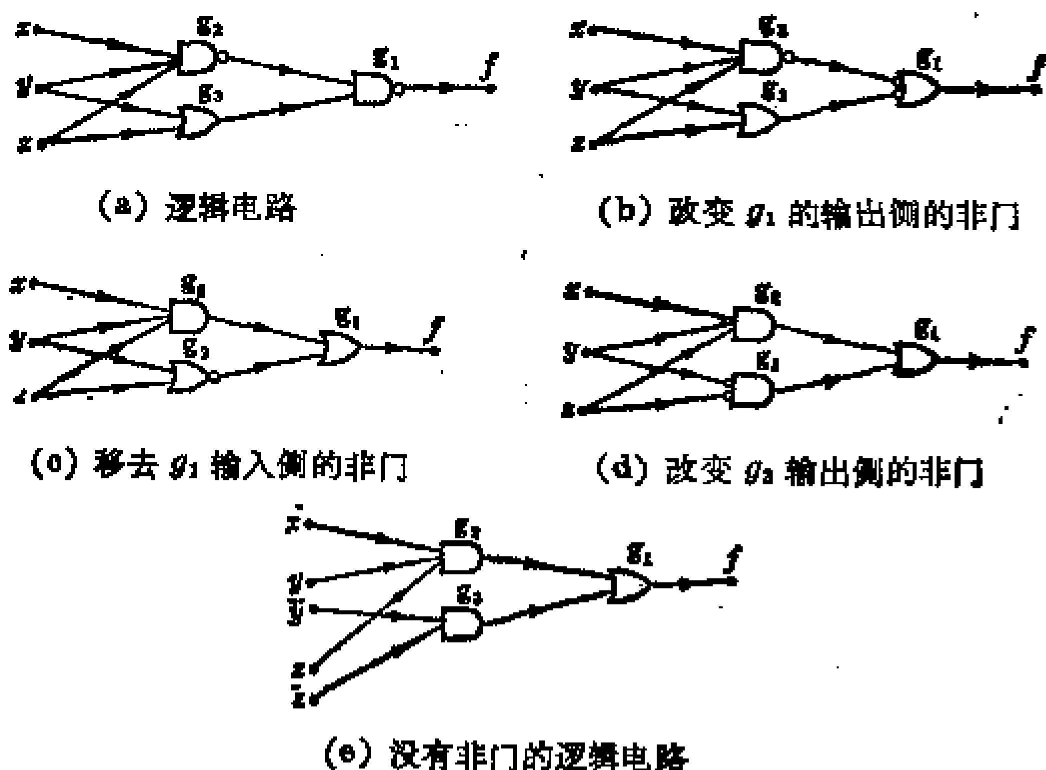


(a) 门的输出侧或输入侧所连的边中有一部分带非门

(b) 门或输入端一分为二，将输出侧边上有非门的归并

图 8.14 门或端子一分为二

[解答] 首先去掉非门。运用法一将与非门 g_1 输出侧的非门移至输入侧，成为图(b)。该 g_1 输入侧的非门变到了 g_2 和 g_3 的输出侧，因而成图(c)。应注意，一条边上有两个非门时，与没有非门完全相同，因而 g_3 和 g_1 之间的边没有非门了。其次，用法二去掉或门输出侧的非门时为图(d)。在此，用法三和法四，将 y 和



(a) 逻辑电路

(b) 改变 g_1 的输出侧的非门

(c) 移去 g_1 输入侧的非门

(d) 改变 g_3 输出侧的非门

(e) 没有非门的逻辑电路

图 8.15 去掉非门的方法

z 的输入端分开，如图(e)那样，设 y 和 z 的输入端为 y、$\bar{y}$、z、$\bar{z}$，逻辑电路的非门被去掉。图 8.15(e)中有两个 1-网，它的量是 xyz 和 $\bar{y}\bar{z}$，因此节点 f 处的输出函数 F 为

$$F = xyz + \bar{y}\bar{z}$$

习　　题

［1］ 试求图 8.16 的逻辑电路的顶点 f_1 和 f_2 的 1-网。

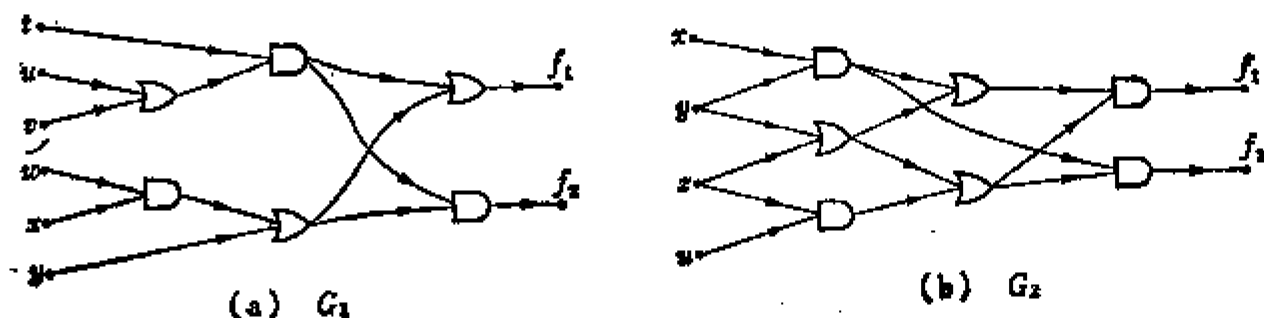


图 8.16　逻辑电路

［2］ 试求图 8.16 逻辑电路的顶点 f_1 和 f_2 的 0-网。

［3］ 试用式(8.10)求图 8.17 逻辑电路的顶点 f 处的输出函数。

［4］ 用式(8.14)求图 8.17 逻辑电路的顶点 f 处的输出函数。

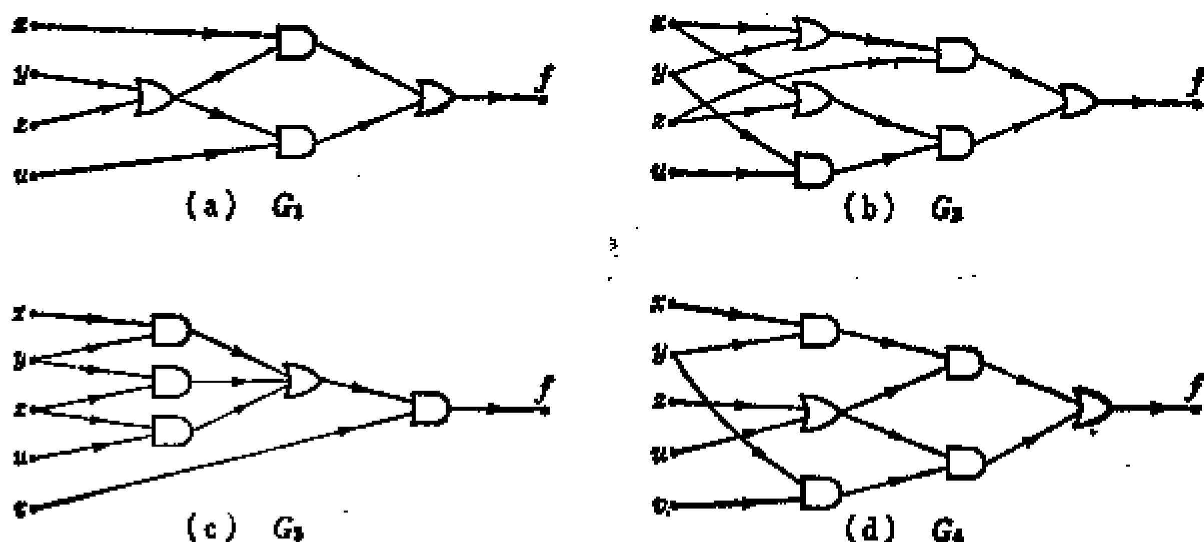


图 8.17　逻辑电路

［5］ 运用 1-网分析图 8.18 的逻辑电路。

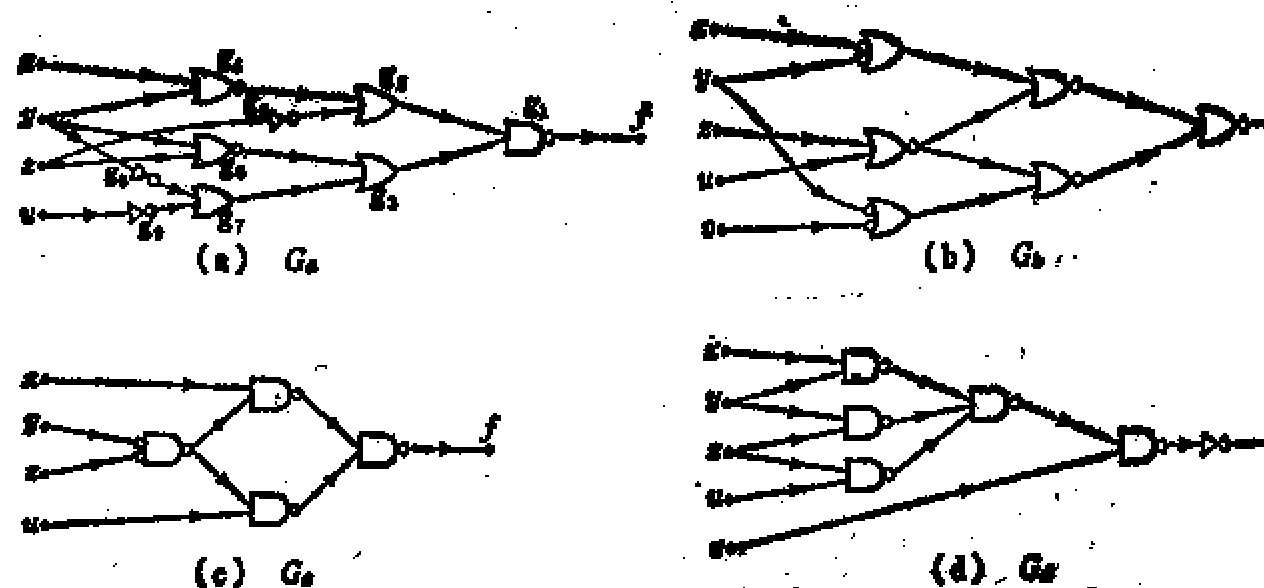


图8.18 逻辑电路

参考文献

1) W. Mayeda: Topological Formula for Logic Networks, Proc. of Asilomar Conf. on Circuit, System and Computer (1976), p. 207—211, Nov.
2) R. E. Prather: Introduction to Switching Theory: A Mathematical Approach, Allyn and Bacon, Inc. (1967)
3) K. Steeghiz: An Introduction to Discrete Systems, John Wiley & Sons. Inc. (1974)
4) T. L. Booch: Digital Networks and Computer Systems, John Wiley & Sons. Inc. (1974)
5) A. Friedman and P. R. Menon: Theory & Design of Swithing Circuits, Computer Science Press, Inc. (1975)
6) Z. Kohavi: Swithing and Finite Automata Theory, McGraw-Hill Book Co. (1978)

附　录

附·1　线性代数基础

[1] 矩阵

所谓矩阵，就是把数或函数按自然数 m, n 排列成式(附 1.1)那样的矩形表。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{附 1.1}$$

构成矩阵的 $m\times n$ 个数(或函数)叫做矩阵的元素(或成分)。横向排列的一排叫做行，纵向排列的一列叫做列。当矩阵有m行及n列时，该矩阵就称作(m, n)**阶矩阵**，简称(m, n)**矩阵**。特别是当 $m=n$ 时，就称作 $m(=n)$**阶方阵**。在矩阵中，从上往下编号为 i 的行叫做第 i 行，从左往右编号为 j 的列叫做第 j 列。位于 A 的第 i 行和第 j 列的元素 a_{ij} 叫做矩阵 A 的(i, j)元素[或者(i, j)成分]。通常把式(附 1.1)的(m, n)矩阵 A 表示为$[a_{ij}]_{m\times n}$。

$(m, 1)$的矩阵称作m元列向量，$(1, n)$矩阵称作n元行向量。因此，对于(m, n)矩阵，只要将m元列向量排列n个，或将n元行向量排列m个就行了。

[2] 矩阵运算

设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$。这两个行数、列数分别相同的

(m, n) 矩阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 的和以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 表示，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=[a_{ij}+b_{ij}]_{m\times n}$。矩阵的常数倍，例如 c 倍，用 $c\boldsymbol{A}$表示，记作 $c\boldsymbol{A}=[ca_{ij}]_{m\times n}$，作为特例，把$(-1)\boldsymbol{A}$ 用$-\boldsymbol{A}$ 表示，$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$写作 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=[a_{ij}-b_{ij}]_{m\times n}$。

当 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times p}$、$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{p\times n}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积表示为$\boldsymbol{AB}$，记作

$$\boldsymbol{AB}=\left[\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\right]_{m\times n}$$

即如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}=[c_{ij}]_{m\times n}$，则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}\quad\begin{pmatrix}i=1,2,\cdots,m\\j=1,2,\cdots,n\end{pmatrix}$$

当 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 分别为(k, l)，(l,m)，(m, n)矩阵时，$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$，矩阵的结合律成立。一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$。

[3] 转置矩阵

当 $\boldsymbol{A}$ 为(m, n)矩阵时，将 $\boldsymbol{A}$ 的行与列交换所得的(n, m)矩阵叫做 $\boldsymbol{A}$ 的转置（或 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵），表示为 $\boldsymbol{A}^t$。$\boldsymbol{A}$ 的(i, j)元素在 $\boldsymbol{A}^t$ 中成为(j, i)元素。矩阵的乘积的转置如下式所示。

$$(\boldsymbol{AB})^t=\boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t \qquad (附 1.2)$$

[4] 矩阵的分块

把给定的矩阵划分成若干个小块叫做矩阵的分块。由分块的结果所得的小块形成的矩阵叫做子矩阵（或部分矩阵）。子矩阵可用来进行求逆矩阵、两个矩阵相乘，行列式的计算、矩阵秩的确定、求最大阶数子矩阵等。

[5] 行列式

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{n\times n}$，如果把 $\boldsymbol{A}$ 的行列式记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或者 $\det \boldsymbol{A}$，则可用下式定义。

$$|\boldsymbol{A}|=\sum_{(j)}(\mathrm{sgn}\, P)a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \qquad \text{（附 1.3）}$$

$\sum_{(j)}$ 意味着关于正整数 1, 2, …, n 的 $n!$ 个置换之和。$j_1, j_2, \cdots, j_n$ 表示 1,2,…,n 各个不同正整数的置换，即 $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$，此式各项中代表行的编号(1, 2, …, n)与代表列的编号($j_1, j_2, \cdots, j_n$)仅出现一次。再者，设置换 P 的符号为

$$\mathrm{sgn}\, P=\begin{cases}1 & j_1\, j_2\cdots j_n \text{ 为偶置换时}^{*1}\\ -1 & j_1\, j_2\cdots j_n \text{ 为奇置换时}^{*2}\end{cases}$$

在实际计算行列式时，往往根据上述定义，使用下述定理 3 与定理 8 所给出的方法。

下面讨论有关行列式的重要定理。读者如想进一步了解这些定理的证明和行列式知识，请参阅适当的数学书。

定理 1 若将 $\boldsymbol{A}$ 的任意两行或任意两列交换，则交换后所得的矩阵的行列式为 $-|\boldsymbol{A}|$。

定理 2 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式与 $\boldsymbol{A}$ 的转置的行列式相等。即

$$|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^t|$$

下面将行列式展开。把 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 j 列去掉后所得到的 $n-1$ 阶子阵的行列式叫做 $|\boldsymbol{A}|$ 的第(i, j)子行列式，这个子行列式乘以 $(-1)^{i+j}$ 叫做 $|\boldsymbol{A}|$ 的第(i, j)余因子，以 A_{ij} 表示①。此时有下述定理 3。

---

*1，*2 参阅第六章 6.2节。

① A_{ij} 又叫做元素 a_{ij} 的代数余子式。——译者

定理 3 行列式$|A|$能够像下面那样对于任意行或任意列展开。

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \qquad (\text{附 }1.4)$$

$$|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \qquad (\text{附 }1.5)$$

式(附 1.4),式(附 1.5)分别叫做关于行列式$|A|$的第i行,第j列的展开。由于余因子也是行列式,所以还可将它对任意行或任意列展开。如果在所得的余因子中,依次重复进行这种展开,最后结果应该跟式(附 1.3)等同。

根据定理 3 可得下述定理。

定理 4 如果A的任一行或任一列的所有元素都为零,则$|A|=0$。又,如果关于$|A|$的某一行或某一列的所有余因子为零,则$|A|=0$。

根据定理 1,有:

定理 5 倘若在A中存在相同的两行,或存在相同的两列,则$|A|=0$。

定理 6 公式$b_1A_{i1}+b_2A_{i2}+\cdots+b_nA_{in}$等于用$[b_1\ b_2\cdots b_n]^t$置换$n$阶方阵$A$的第$i$行$[a_{i1}\ a_{i2}\cdots a_{in}]$之后所得矩阵的行列式。同样,$b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$等于用$[b_1\ b_2\cdots b_n]^t$置换$A$的第$j$列$[a_{1j}\ a_{2j}\cdots a_{nj}]$之后所得矩阵的行列式。

显然,由定理 3 的式(附 1.4)与式(附 1.5),即可证明这个定理。

[6] 两个矩阵的乘积及其行列式

现设矩阵A、B分别为(m,n)形、(n,m)形,则AB为m阶方阵。在叙述$|AB|$的公式之前,让我们作如下定义。

所谓某个矩阵的最大阶数子行列式(major determinent),指的是该矩阵中具有最大阶数的方阵的行列式。譬如,在(3,2)矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

中，其最大阶数子行列式是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

因此，在(m, n)矩阵 A 中，其最大阶数子行列式，当 $m \leqslant n$ 时为 m 阶，当 $m \geqslant n$ 时为 n 阶。

其次，设 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$，$B=[b_{ij}]_{n\times m}$，并设 $m \leqslant n$。这时，所谓 A 的最大阶数子行列式和 B 的最大阶数子行列式，指的是当且仅当 A 的最大阶数子行列式列的编号与 B 的最大阶数子行列式行的编号一致时，A 与 B 中对应的最大阶数子行列式。

例如

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \quad 与 \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

就是 A 与 B 中对应的最大阶数子行列式的一例。

以上述定义为基础，有：

定理 7 设 A、B 分别为(m, n)矩阵和(n, m)矩阵。假如 $m \leqslant n$，则$|AB|$等于 A 和 B 中对应的最大阶数子行列式的乘积的总和(Binet-Cauchy 定理)；假如 $m > n$，则像后面所说的那样，$|AB|=0$。

例如

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}
$$

$$
+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}
$$

根据 Binet-Cauchy 定理，有：

推论 1　假如 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是方阵，则

$$
|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|
$$

此外，定理 7 中，假如 $m>n$，则 $|\boldsymbol{AB}|=0$。这点可证明如下。现设

$$
\boldsymbol{A}_1 = [\boldsymbol{A} \,\vdots\, \overbrace{\boldsymbol{0}}^{m-n\text{列}}] \qquad \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} \\ \cdots\cdots \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \}m-n\text{行}
$$

$\boldsymbol{0}$ 表示零矩阵。由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1$，根据推论 1 与定理 5，得

$$
|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1| = |\boldsymbol{A}_1| \cdot |\boldsymbol{B}_1| = 0 \cdot 0 = 0
$$

[7] 矩阵的秩

当 (m, n) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 给定时，在 $\boldsymbol{A}$ 的正方子阵中，其子行列式不为零的那些子行列式的最大阶数叫做 $\boldsymbol{A}$ 的秩 (rank)。换句话说，当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶子行列式中存在不为零的子行列式，而 $(r+1)$ 阶以上的所有子行列式为零时，就把 r 叫做 $\boldsymbol{A}$ 的秩。$\boldsymbol{A}$ 的秩以 $r(\boldsymbol{A})$ 表示。

与本书内容有关的秩的定理陈述如下。

定理 8　在 (m, n) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，m 个行向量中线性独立的行的最大行数及 n 个列向量中线性独立的列的最大列数都等于 $r(\boldsymbol{A})$。

定理 9 对于(m, n)矩阵 $\boldsymbol{A}$，$n-r(\boldsymbol{A})$叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的零度(nullity)。零度等于构成齐次线性方程组 $\boldsymbol{AX}=0$ 的解的线性空间的元(基本解的个数)。

上述定理可由定理 14 得出。

[8] 矩阵的初等变换

如果将秩的定义原封不动地应用于矩阵来求矩阵的秩，那末计算是很麻烦的。因此，就有了不改变已知矩阵的秩，而使矩阵简单变形，从而决定秩的方法。

这种方法包括下列六种处理方法，叫做矩阵的初等变换。

(1) 任意两行互相置换。

(2) 将任一行乘以常数，即该行的所有元素乘以非零常数。

(3) 某行的常数倍，加到其他行上。

(4)，(5)，(6)对列进行跟(1)，(2)，(3)相同的处理。

经过初等变换后保证秩不发生变化的定理是：

定理 10 对矩阵施行初等变换后所得的矩阵跟原来的矩阵是同形式的，且具有相同的秩。

若将这个初等变换继续不断地进行下去，最后就可使矩阵成为下列形式中的任一种。

$$[\boldsymbol{U}_r] \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_r \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad [\boldsymbol{U}_r \vdots 0] \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_r & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

r 是矩阵的秩，$\boldsymbol{U}_r$ 表示 r 阶单位矩阵[式(附 1.6)]。将初等变换使用若干次，使对角线元素逐渐都成为 1 的变换方法叫做消元法。

[9] 逆矩阵

在 n 阶方阵中，其对角线元素都是 1，其余元素都是 0 的矩阵

叫做 n 阶单矩位阵，以 U_n 表示。即

$$U_n=\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}}^{n\text{列}}\Bigg\}n\text{行} \tag{附 1.6}$$

给定 n 阶方阵 A，当形成 $AY=YA=U_n$ 这样的(n 阶)方阵 Y 存在时，Y 就称作 A 的逆矩阵。该 Y 用 A^{-1} 表示。对于 n 阶方阵 A，设 A_{ij} 为 $|A|$ 的第(i, j)余因子。以这样的余因子作为元素的下列(n 阶正方)矩阵就叫做 **A 的伴随矩阵**(adjoint matrix of A)。

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \tag{附 1.7}$$

根据定理 3 中式(附 1.4)、式(附 1.5)和定理 7，有

$$A\tilde{A}=\tilde{A}A=\begin{bmatrix} |A| & & & 0 \\ & |A| & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |A| \end{bmatrix}=|A|U \tag{附 1.8}$$

假若 $|A|\neq 0$，便可像下面那样定义 Y。设

$$Y=\frac{\tilde{A}}{|A|}=\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{bmatrix} \tag{附 1.9}$$

由于 $AY=YA=U_n$，所以根据定义，式(附 1.9)的矩阵 Y 为 A 的逆矩阵。故此可知，如果 $|A|\neq 0$，则 A 的逆矩阵存在。反过

来说，若 $\boldsymbol{Y}$ 为满足 $\boldsymbol{AY}=\boldsymbol{YA}=\boldsymbol{U}_n$ 的任一矩阵，则

$$|\boldsymbol{AY}|=|\boldsymbol{YA}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{Y}|=|\boldsymbol{Y}|\cdot|\boldsymbol{A}|$$
$$=|\boldsymbol{U}_n|=1$$

因此
$$|\boldsymbol{A}|\neq 0$$

由此得下述定理。

定理 11 当且仅当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 才有逆矩阵。其逆矩阵完全可以由式(附 1.9)决定。

$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 的矩阵，即存在逆矩阵的矩阵，叫做**正则(非奇异)矩阵**(nonsingular matrix)。而如果 $|\boldsymbol{A}|=0$，就说 $\boldsymbol{A}$ 是**奇异的**(singular)。

[10] 线性联立方程组

一般的线性联立方程组可写成下面的形式：

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \qquad (\text{附 } 1.10)$$

式中，m 代表线性方程式的个数，n 代表未知数的个数。现在若令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

则式(附 1.10)可改写成下式：

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \qquad (\text{附 } 1.11)$$

$\boldsymbol{A}$ 称为**系数矩阵**。使联立方程式(附 1.11)成立，即解存在的充要条件由下面的定理给出。

定理 12 使联立方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解的充要条件是，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与增广系数矩阵(augmented matrix) $[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B}]$ 具有相同的秩。这儿的证明用的是消元法(或高斯消元法)，这个方法对利用

计算机等解实际的联立方程组也是有效的。

〔证明〕 设联立方程组 $\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{B}=0$ 由m个线性方程式与 n 个未知数组成。从 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中选出适当的变数 x_{i_1}，将 x_{i_1} 的系数不为零的线性方程式排在m个方程式的最前面，并且如有必要，可变换变数的顺序。把 x_{i_1} 及其系数变换到方程式最前面位置的那些项重新排列。用 x_{i_1} 的系数去除它所在的方程式，并从剩下的$(m-1)$个方程中消去 x_{i_1}。

然后，从剩下的$(m-1)$个方程中，适当地把变数 x_{i_2} 的系数不为零的方程式作为第 2 个方程，如有必要可变换变数的顺序，将 x_{i_2} 及其系数置于方程式最前面的位置。用 x_{i_2} 的系数去除该方程式，从第一个方程式及第三个往下的所有方程式中消去 x_{i_2}。

将这种处理方法继续进行下去，即可得到如下的线性方程组：

$$\left.\begin{array}{l}
x_{i_1} \qquad\qquad + c_{1,i_{k+1}}x_{i_{k+1}} + c_{1,i_{k+2}}x_{i_{k+2}} + \cdots + c_{1,i_n}x_{i_n} - d_1 = 0 \\
\quad x_{i_2} \qquad\quad + c_{2,i_{k+1}}x_{i_{k+1}} + \cdots\cdots\cdots\cdots + c_{2,i_n}x_{i_n} - d_2 = 0 \\
\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad x_{i_k} + c_{k,i_{k+1}}x_{i_{k+1}} + \cdots\cdots\cdots\cdots + c_{k,i_n}x_{i_n} - d_k = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - d_{k+1} = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - d_n = 0
\end{array}\right\}$$

（附 1.12 ）

这个高斯消元法，不过是前述的对 $\boldsymbol{A}$ 与 $[\boldsymbol{A} \vdots -\boldsymbol{B}]$ 的初等变换。因此，假如 $\boldsymbol{A}$ 与 $[\boldsymbol{A} \vdots -\boldsymbol{B}]$的秩相同，即 $\boldsymbol{A}$ 与 $[\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}]$ 的秩相同，则 $-d_{k+1}=-d_{k+2}=\cdots=-d_n=0$，式(附 1.12)有解。换言之，假如 $\boldsymbol{A}$ 与 $[\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}]$的秩不同，则 $-d_{k+1}, -d_{k+2}, \cdots, -d_n$ 中至少有一个不是 0 。

另一方面，假如式(附 1.12)不成立，则 $-d_{k+1}$，$-d_{k+2}$，$\cdots$，$-d_n$ 中也至少有一个不是 0。因此，这种情况下，$\boldsymbol{A}$ 与 $[\boldsymbol{A} \vdots -\boldsymbol{B}]$

是不同秩的[证明结束]。

对于联立方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，假如满足这个定理，则在式（附1.12)中，只要适当给出 $x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+1}}, \cdots, x_{i_n}$ 的值，$x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ 便自动地确定。这样一来，所求得的值 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_{k+1}}, \cdots, x_{i_n}$ 便是 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解。

在式(附 1.10)中，当 $m=n$ 时又将怎样？假如 $r(\boldsymbol{A})<m$，则和前述一样，所以 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，即可取 $r(\boldsymbol{A})=m$。此时由于 $\boldsymbol{A}$ 与 $[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}]$ 的秩自动相等，显然解是存在的。同时，根据 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，可得解为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} \qquad (附 1.13)$$

并且解是唯一的。

现在，把 $\boldsymbol{A}$ 的 j 列用列向量 $\boldsymbol{B}$ 置换后所得的矩阵设为 $\boldsymbol{A}_j$，即设

$$\boldsymbol{A}_j=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} & & \overset{j\text{列}}{\downarrow} & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \qquad (附 1.14)$$

便可得出所谓的“克莱姆法则”。

定理 13 [克莱姆法则]假如联立方程式(附 1.11)的系数矩阵为 n 阶方阵且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则方程存在唯一解并由下式给出。

$$x_j=\frac{|\boldsymbol{A}_j|}{|\boldsymbol{A}|} \quad (j=1,2,\cdots,n) \qquad (附 1.15)$$

这个公式，如用式(附 1.9)的 $\boldsymbol{Y}$ 代替式(附 1.13)中的 $\boldsymbol{A}^{-1}$，由定理 6 便可证明。

[11] 齐次方程组

联立方程的特殊情况

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0 \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad \text{(附 1.16)}$$

即 $AX=0$ 叫做齐次方程组。这个方程组具有 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 的平凡解。按照定理 12 的证明过程，可得定理 14。

定理 14 齐次方程组（附 1.16）具有平凡解以外的解的充要条件是 $r(A)<n$，即 $|A|=0$。

因此，根据消元法（在 $AX=0$ 的情况下，式（附 1.12）中 $d_1=d_2=\cdots=d_n=0$），若在 n 个未知数中，适当确定 $n-r(A)$ 个未知数（若取 $r(A)=k$，则为 $x_{i_{k+1}},\cdots,x_{i_n}$）的值，那末剩下的 $r(A)$ 个未知数（$x_{i_1}, x_{i_2},\cdots,x_{i_k}$）的值便确定了。从而得出了定理 9 的证明。

［12］ 向量的线性独立

假定给出 k 个 m 项向量 $A_1, A_2,\cdots, A_k$。当 k 个常数 $c_1, c_2,\cdots, c_k$ 全部存在，且

$$c_1A_1+c_2A_2+\cdots c_kA_k=0 \qquad \text{(附 1.17)}$$

成立时（右边的 0 代表全部元素都是 0 的 m 项向量），这些向量 $A_1, A_2,\cdots, A_k$ 是**线性相关的**。当不是线性相关时，就说是线性**独立的**。即，所谓 $A_1, A_2,\cdots, A_k$ 是线性独立的，就是当式（附 1.17）成立时，总有 $c_1=c_2=\cdots=c_k=0$。

下面的定理是考察向量的独立性的重要定理。

定理 15 k 个 m 项向量 $A_1, A_2,\cdots, A_k$ 为线性相关的充要条件是，以给定向量作为列的矩阵 $A=[A_1\ \ A_2\ \ \cdots\ \ A_k]$ 的秩小于 k；而 k 个 m 项向量为线性独立的充要条件是 $r(A)=k$。

［证明］ 让我们考虑式（附 1.17）。把式（附 1.17）改写为

$$[A_1\ \ A_2\ \ \cdots\ \ A_k]\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}=0 \qquad \text{(附 1.18)}$$

即与 $AC=0$ 相同。这里设 C 为以 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 作为元素的列向量。如果 k 个向量是线性相关的，则根据定义在 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 中至少有一个不为零。而 $AC=0$ 是齐次方程，按定理 14 是 $r(A)<k$。反之，假如 $r(A)<k$，则 $AC=0$ 存在非平凡解，所以 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 全部不为 0。故这些向量是相关的。

用完全相同的方法，可以证明向量为线性独立的充要条件是 $r(A)=k$。

附·2 排列与组合

[1] 排列

从含有 n 个元素的集合中取出 r 个元素按顺序排列，这样一种排列方法，一般就叫做排列。这种情况，准确的说，叫做“从由 n 个元素组成的集合中取出 r 个元素的排列”(permutation)。在集合中的所有元素都不相同的情况下，便叫做从各不相同的 n 个(元素)中取出 r 个的排列 (an r-permutation of n objects)。若把这个排列数表示为 nP_r，则从 n 个元素中拿出一个放于一列的最前面位置的放置方法共有 n 个，在第二个位置上有 $(n-1)$ 个放置方法。这样继续作下去，在第 r 个位置上有 $n-(r-1)$ 个放置方法。因此

$$nP_r=n(n-1)\cdots(n-(r-1)) \qquad (附 2.1)$$

若利用 n 的阶乘 $n!=n(n-1)\cdots 2\cdot 1$，则式(附 2.1)可写为

$$nP_r=\frac{n!}{(n-r)!} \qquad (附 2.2)$$

不言而喻，$nP_n=n!$

倘若 n 个元素各不相同，而且是由 r 种元素构成的，nP_r 则应按下式来求。现在，设第 k 种元素的个数为 q_k $(k=1, 2, \cdots, r)$，

$q_1+q_2+\cdots+q_r=n$，则

$$nP_r=\frac{n!}{q_1!q_2!\cdots q_r!} \tag{附 2.3}$$

[2] 组合

从含有 n 个元素的集合中，不考虑怎样的顺序，取出 r 个，这样一种取出方法叫做从该集合中取出 r 个元素的一个组合（combination）。把从各不相同的 n 个元素中取出 r 个的组合数表示为 nC_r，则

$$nC_r=\frac{nP_r}{r!}=\frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{附 2.4}$$

另一方面，根据二项式定理，有关系式

$$(a+b)^n=\sum_{r=0}^{n} nC_r a^{n-r} b^r$$

若取 $a=b=1$，则可得下面的等式：

$$nC_0+nC_1+\cdots+nC_n=2^n \tag{附 2.5}$$

附·3 布尔代数

[1] 布尔代数

所谓布尔代数(a Boolean algebra)*1，定义为集合 $S=\{x, y, z, \cdots\}$和在 S 上定义的两种运算"+"与"·"满足下列四个公理。+与·不是通常所说的加法和乘法，这种运算的结果仍然是 S 的元素（即是闭的）。

---

*1 例如，电子通讯手册。

E. J. McClusky: Introduction to the Theory of Switching Circuits, McGraw-Hill。

公理 1

$$x+y=y+x \qquad \text{(交换律)}$$
$$x\cdot y=y\cdot x$$

公理 2

$$x(y+z)=x\cdot y+x\cdot z \qquad \text{(分配律)}$$
$$x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)$$

公理 3

对于＋和·，分别存在单位元 0 和 1，对所有的 $x\in S$，有

$$0+x=x$$
$$1\cdot x=x$$

公理 4

对于 S 的各个元素，存在补码(complement) $\bar{x}\in S$，使得

$$x+\bar{x}=1$$

并且

$$x\cdot\bar{x}=0$$

根据这四个公理，通常可导出如下常见的定理：

$$x+x=x, \qquad x\cdot x=x \quad \text{(幂等律)}$$
$$x+1=1, \qquad x\cdot 0=0$$
$$\overline{(\bar{x})}=x$$
$$x+x\cdot y=x, \qquad x(x+y)=x \quad \text{(吸收律)}$$
$$x+(y+z)=(x+y)+z, \quad x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z \quad \text{(结合律)}$$
$$\overline{(x+y)}=\bar{x}\cdot\bar{y}, \qquad \overline{(x\cdot y)}=\bar{x}+\bar{y} \quad \text{(D·摩根定理)}$$

用布尔代数定义的集合，不论是有限的还是无限的都可以，不过 S 仍是由{0,1}两个元素组成的两个状态的布尔代数。在开关电路中，把＋和·对应于或门(OR)电路(逻辑和)和与门(AND)电路(逻辑积)的情况是很多的。还有，补码 $\bar{x}$ 也叫做 x 的否定。

[2] 模 2 算法

在{0,1}集合中，具有 + 和 · 运算的代数中，和(+)与积(·)的运算成为下列所示。

和(+)： $0+0=0$， $0+1=1+0=1$， $1+1=0$

积(·)： $0\cdot 0=0$， $0\cdot 1=1\cdot 0=0$， $1\cdot 1=1$

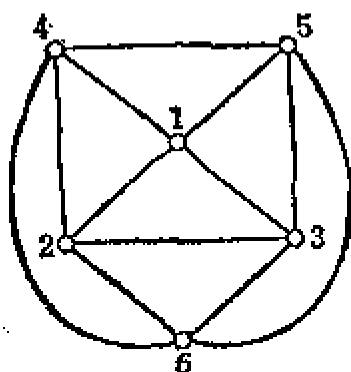
在上面的运算中，除去 $1+1=0$ 以外，也可以看作普通的加法与乘法。还有，必须注意在两个状态的布尔代数中 $1+1=1$。

习 题 详 解

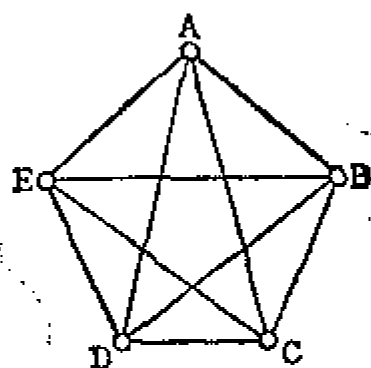
第一章

[1] 如解图 1.1。

[2] 把各个队用顶点表示，把比赛用联接两顶点间的边表示。由于联赛是循环赛，所以形成像解图 1.2 那样的完备图。



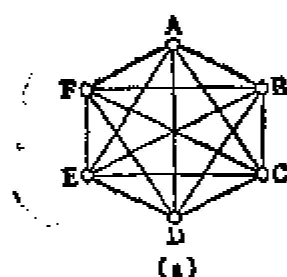
解图 1.1 骰子眼的线图表示

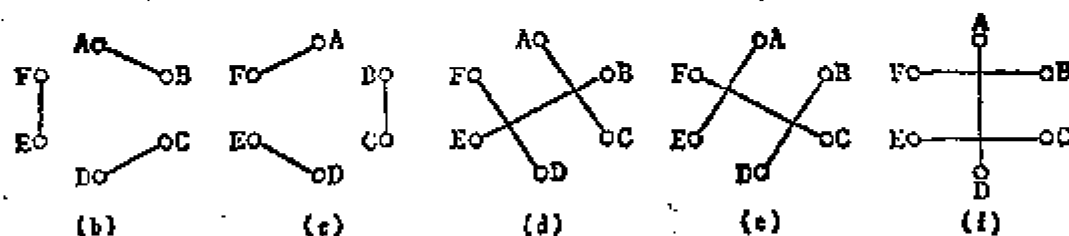


解图 1.2 五个队联赛

[3] 设六个队为 A, B, C, D, E, F，联赛的图如解图 1.3(a)所示。若把这个问题用图来分析，则所谓同一个队在一天之内不许比赛两次以上，一天之内进行三场比赛，就是从联赛的图中选出 3 条边(子图)，且 6 个顶点中每个顶点仅与 1 条边联接着(这种处理方法叫做图的分解(factorization))。满足这个条件的 3 条边的选择示于图(b)—图(f)。由此整个比赛日程可安排如下：

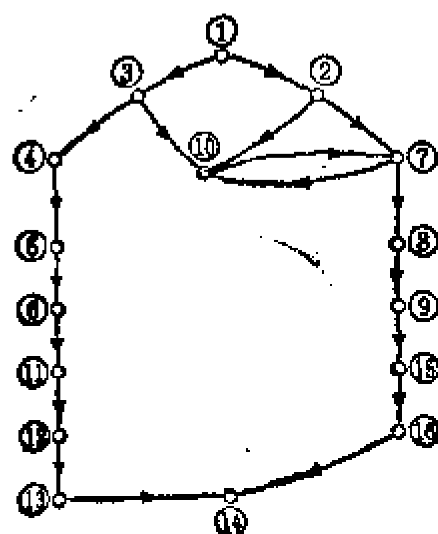
第一日	第二日	第三日	第四日	第五日
AB	FA	EB	DB	EC
CD	BC	CA	CF	DA
EF	DE	FD	AE	FB





解图 1.3

[4] 把三个玻璃杯中乳剂的量依次用 800cm^3, 500cm^3, 300cm^3 杯子的三组量表示,作为一种状态。例如,将最初的状态表示为(800, 0, 0),倒入乳剂的操作完毕就变成另一种状态。如果将这样的状态对应于顶点,将状态的转变对应于有向边,将全部可能的状态及状态转变表示为有向图,那末从(800, 0, 0)到最后目标(400, 400, 0)的状态的最少注入次数,就可根据能够走过最少的边数(最短路径)来求得。可能的状态为下列 16 种。



解图 1.4

①	(800, 0, 0)	⑦	(300, 200, 300)
②	(300, 500, 0)	⑧	(600, 200, 0)
③	(500, 0, 300)	⑧	(600, 0, 200)
④	(500, 300, 0)	⑩	(0, 500, 300)
⑤	(200, 300, 300)	⑪	(700, 0, 100)
⑥	(200, 500, 100)	⑫	(700, 100, 0)

⑬ (400, 100, 800)　　⑮ (100, 500, 200)

⑭ (400, 400, 0)　　⑯ (100, 400, 300)

解图 1.4 表示了状态转变情况，此时，最少操作次数是 7 次，即①→②→⑦→⑧→⑨→⑮→⑯→⑭为所求的最短路径。此外，还可再考虑⑤→⑩、⑥→⑩，…等有问边，但都增加了操作次数，故将它们略去，这个图没有表示所有的状态转变情况。

第二章

[1] 像这样的图，在任何两个顶点间都有边，故是完备图。设可能的最大边数为 b，则任一顶点的次数都是 $(n-1)$，所以按式(2.11)得 $2b=n(n-1)$。

[2] 设 G 的 ρ 个连通片分别为 G_i $(1\leqslant i\leqslant\rho)$，$G_i$ 有 n_i 个顶点。根据本章题[1]，G_i 可能的最大边数是 $\frac{1}{2}n_i(n_i-1)$，所以 G 的最大边数 $=\sum_{i=1}^{\rho}\frac{1}{2}n_i(n_i-1)$。现在，设 ρ 个连通片中有 $\rho-1$ 个是孤立点的图为 G_0，即 $n_1=n_2=\cdots=n_{\rho-1}=1, n_\rho=n-(\rho-1)$，则 G_0 的最大边数 $=\frac{1}{2}n_\rho(n_\rho-1)=\frac{1}{2}(n-\rho+1)(n-\rho)$。我们来考察 G 中不是孤立点，而至少各有两个顶点的两个连通片 G_i 和 G_j，这里令 $1<n_i\leqslant n_j$。若设 G_i 的顶点减少一个，G_j 的顶点仅仅增加一个的图为 G'，显然 G' 的可能的最大边数 $>G$ 的最大边数。由此可知，若将这个作法继续下去，最后 G_0 就具有最大边数。

[3] 由定义，$r(G)=n-\rho$, $n(G)=b-r(G)=b-n+\rho$，设将 G 的任意边用串联的两个边置换后所得的图为 G'，则 G' 的顶点数及边数分别增加一个，连通片数没有变化。所以 $r(G')=(n+1)-\rho$，所以 $n(G')=(b+1)-r(G')=b-n+\rho=n(G)$，零度不变。同样，若将 G 的串联的两个边用一个边置换后所得的图设

为 G''，则 $r(G'') = (n-1)-\rho$，$n(G'') = (b-1)-r(G'') = n(G)$。

［4］ 设G有n个顶点和b条边，且由ρ个连通片G_i ($1 \leqslant i \leqslant \rho$)组成。若$G_i$的顶点数与边数分别为$n_i$，$b_i$，则$r(G_i)=n_i-1$，$n(G_i)=b_i-r(G_i)$。于是

$$\sum_{i=1}^{\rho} r(G_i) = \sum_{i=1}^{\rho}(n_i-1) = (n_1+\cdots+n_\rho)-\rho = n-\rho = r(G)$$

$$\sum_{i=1}^{\rho} n(G_i) = (b_1+b_2+\cdots+b_\rho)-(r(G_1)+r(G_2)+\cdots+r(G_\rho)) = b-(n-\rho) = n(G)$$

［5］ 设有n个顶点的连通图为G。假如在G中有回路，就将回路的某一条边去掉，这种处理继续下去，直到没有回路为止，最后不论去掉哪条边都成为不连通的子图，以T表示。T是有n个顶点，没有回路的连通图。让我们用归纳法证明T有$(n-1)$条边。当T有两个顶点时是最明显的，因此，假定T在有$(n-1)$个顶点时成立。由T去掉一条边所得到的两个连通片中，依据假定，分别有(n_1-1)，(n_2-1)条边。使T的边恢复到原来的状态，便为$(n_1-1)+(n_2-1)+1=(n_1+n_2)-1=n-1$。

［6］ 假设在具有n个顶点的连通图的两个顶点间，存在这样的顺行路线。因此，只要考察在具有$(n+1)$个顶点的连通图上，适当的将一条边短接后所得的图的顺行路线，然后将被短接的边恢复到原状就可以了。此外，很明显，从这样的顺行路线可得到路径（第三章）。

［7］ 设平面图G的任意两个区域为f_i，f_j，其对偶图G^*中对应的顶点为v_i，v_j。若从区域f_i出发，依次通过相邻的区域，应该能到达区域f_j，因而通过相邻区域的边为$e_1, e_2, \cdots, e_p$。在G^*上，若对应于这些边的边为$e_1', e_2', \cdots, e_p'$，则$(e_1', e_2', \cdots, e_p')$是从$v_i$出发到达$v_j$的边的序列。这些$p$个边不必是全不相同的，因

此，很明显，同一条边可以通过两次，从而在这个序列中，在 v_i 与 v_j 之间存在路径。

第三章

[1] 用归纳法来证明。显然，$b=1$ 时，$n=2$。设 $b=m$ 时，$m=n-1$ 成立。当 $b=m+1$ 时，若把终点及联接在终点上的边去掉，便是 $b=m$ 的路径；若在此路径中把去掉的边重新联接上，就成为边与顶点都增加 1 的路径，所以边数 $=m+1=(n-1)+1=(n+1)-1$。

[2] (1)把属于 V_1 的两个顶点 (v_1, v_k) 之间的路径表示为 $(v_1v_2)(v_2v_3)\cdots(v_{k-1}v_k)$。若 (v_iv_{i+1}) $(1\leqslant i\leqslant k-1)$ 代表边，则路径的最初的边 (v_1v_2) 的端点 v_2，根据双图的定义，有 $v_2\in V_2$；对于 (v_2v_3)，因 $v_2\in V_2$，所以 $v_3\in V_1$。按这个方法反复进行下去，则 $v_{k-1}\in V_2$。容易明白，这个路径的边数是偶数。

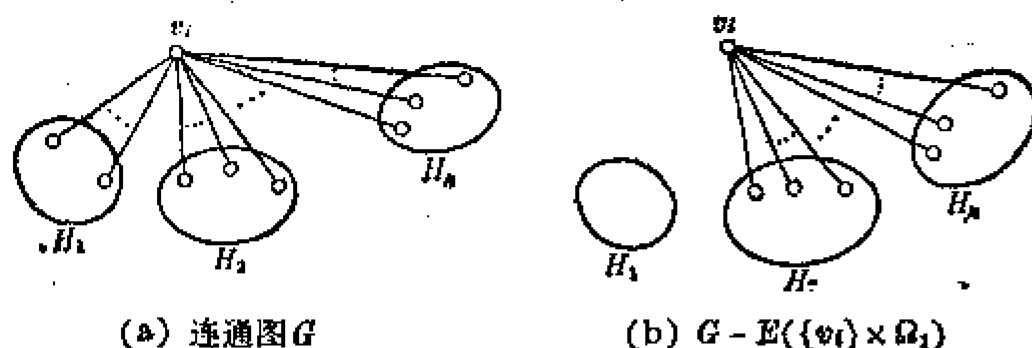
(2)同样能够证明，故省略。

[3] 对于这个割集 Q，因为不分割 G 的 i、j，所以 i、j 包含于 $G-Q$ 的一个连通片内。因此，这个子图是连通的，在 i, j 之间有路径 P，当然在这个连通片内不包含 Q 的边，所以 $P\cap Q=\varnothing$。

[4] 设 i, j 之间的路径为 P, P 中一条也不包含 Q 的边，即使从 G 中去掉 Q 的所有的边，在 i, j 之间不包含 Q 的边的路径 P 也存在，因而 Q 成为不分割 i, j 间的割集，这与前提条件相矛盾。

[5] 当图不是连通的情况时，只要对于其中的一个连通片，以下的议论适用就行了，因此假定图 G 是连通的。设 G 的任一顶点为 v_i。若从 G 中去掉关联集合 $Q(v_i)$，则得到孤立点 v_i 及子图，于是连通片至少增加一个。倘若这个所得到的子图是连通的，那末 $Q(v_i)$ 就成为最小的割集。如果从 G 中去掉 $Q(v_i)$ 后的结果，

除去$\{v_i\}$之外，还得到像解图 3.1(a) 那样的连通片 H_1, H_2, …, H_k。设连通片 H_j $(1\leqslant j\leqslant k)$ 的全部顶点为 Ω_j。若把 v_i 与连接



解图 3.1

g_j 的边的集合表示为 $E(\{v_i\}\times\Omega_j)$，则

$$Q(v_i)=E(\{v_i\}\times\Omega_1)\cup E(\{v_i\}\times\Omega_2)\cup\cdots\cup E(\{v_i\}\times\Omega_k)$$

如果从G中去掉 $E(\{v_i\}\times\Omega_1)$，就成为图(b)，所得的图的秩仅比G减少 1，而且 $E(\{v_i\}\times\Omega_1)$是极小(如果不是极小，就与 H_1 是连通的这一点相违背)，所以这个边集合 $E(\{v_i\}\times\Omega_1)$ 是G的割集。同样，$E(\{v_i\}\times\Omega_2)$，…，$E_1(\{v_i\}\times\Omega_k)$ 都是G的割集，相互之间不具有共同边。故 $Q(v_i)$是互相没有共同边的几个割集的并集。

[6] 设完备图G_0一般具有 n 个顶点 v_i $(1\leqslant i\leqslant n,\ n>1)$。若从 G_0 中去掉任意的关联集合 $Q(v_i)$，便得到孤立点 v_i 及由$(n-1)$个顶点$\{v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_{i+1}, \cdots, v_n\}$组成的完备图。如果 $Q(v_i)$的边即使留下一条，G_0 也不能分成两部分，所以 $Q(v_i)$的真子集不能把 G_0 分成两部分，故 G_0 的任一关联集合是割集。

[7] 如果把G的全部顶点适当地分成四个互质的子集$(\neq\phi)$ Ω_a、Ω_b、Ω_c、Ω_d，则 $\Omega=\Omega_a\cup\Omega_b\cup\Omega_c\cup\Omega_d$，且 $\Omega_p\cap\Omega_q\neq 0$ $(p\neq q,\ p,\ q\in\{a, b, c, d\})$。连接 $\Omega_a\cup\Omega_b$ 的顶点与 $\Omega_c\cup\Omega_d$ 的顶点的边，可作如下分解：

$$E(\Omega_a\cup\Omega_b\times\Omega_c\cup\Omega_d)$$
$$=E(\Omega_a\times\Omega_c)\cup E(\Omega_a\times\Omega_d)\cup E(\Omega_b\times\Omega_c)\cup E(\Omega_b\times\Omega_d)$$

$$= E(\Omega_a \times \Omega_c) \oplus E(\Omega_a \times \Omega_d) \oplus E(\Omega_b \times \Omega_c) \oplus E(\Omega_b \times \Omega_d) \quad (1)$$

同样

$$E(\Omega_a \cup \Omega_b \times \Omega_a \cup \Omega_b) = E(\Omega_a \times \Omega_a) \cup E(\Omega_a \times \Omega_b) \cup$$

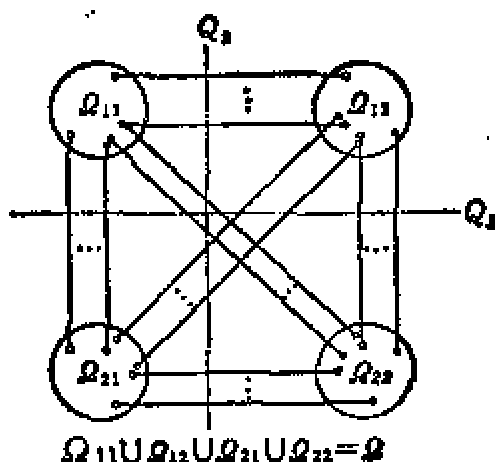
$$E(\Omega_b \times \Omega_b) = E(\Omega_a \times \Omega_a) \oplus E(\Omega_a \times \Omega_b) \oplus E(\Omega_b \times \Omega_b) \quad (2)$$

在解图 3.2 中，设两个不同的割集为 Q_1，Q_2，则

$$Q_1 = E(\Omega_{11} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{22})$$

$$Q_2 = E(\Omega_{11} \cup \Omega_{21} \times \Omega_{12} \cup \Omega_{22})$$

这里，$\Omega = \Omega_{11} \cup \Omega_{12} \cup \Omega_{21} \cup \Omega_{22}$ 中的四个集合(Ω_{11}，Ω_{12}，Ω_{21}，Ω_{22})是互质的。此时，用式(1)、(2)求$Q_1 \oplus Q_2$，并加以整理，则有



解图 3.2

$$Q_1 \oplus Q_2 = E(\Omega_{11} \times \Omega_{12}) \oplus E(\Omega_{21} \times \Omega_{22})$$

$$\oplus E(\Omega_{11} \times \Omega_{21}) \oplus E(\Omega_{12} \times \Omega_{22}) \quad (3)$$

在 $E(\Omega_{11} \times \Omega_{12})$，$E(\Omega_{21} \times \Omega_{22})$，$E(\Omega_{11} \times \Omega_{21})$，$E(\Omega_{12} \times \Omega_{22})$中，无论哪两个集合都没有共同边，所以如果设 $\Omega_s = \Omega_{11} \cup \Omega_{22}$，则上式成为

$$Q_1 \oplus Q_2 = E(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12}) = E(\Omega_s \times \Omega_s^c) \quad (4)$$

让我们用以上的预备性内容来证明式（3.2）。设G有n个顶点 v_1，v_2，…，v_n，将Ω作如下分割：$\Omega_{11} = \phi$，$\Omega_{12} = \{v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}\}$，$\Omega_{21} = \{v_k\}$，$\Omega_{22} = \{v_{k+1}, \cdots, v_n\}$。

由式(4)

$$E(\Omega_{11} \cup \Omega_{12} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{22}) \oplus E(\Omega_{11} \cup \Omega_{21} \times \Omega_{12} \cup \Omega_{22})$$

$$= E(\{v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}\} \times \{v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}\}^c) \oplus E(\{v_k\}$$

$$\times \{v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}, v_{k+1}, \cdots, v_n\})$$

$$= E(\Omega_{11} \cup \Omega_{22} \times \Omega_{21} \cup \Omega_{12})$$

$$= E(\{v_{k+1}, \cdots, v_n\} \times \{v_1, v_2, \cdots, v_k\})$$

若设 $k=2$，则上式变为

$$E(\{v_1\}\times\{v_1\}^c)\oplus E(\{v_2\}\times\{v_2\}^c)=E(\{v_1,v_2\}\times\{v_1,v_2\}^c)$$

因此，如果一般地设 $k=m$，利用 $k=1, 2, \cdots, m-1$ 的情况，则得

$$E(\{v_1\}\times\{v_1\}^c)\oplus E(\{v_2\}\times\{v_2\}^c)\oplus\cdots\oplus E(\{v_m\}\times\{v_m\}^c)$$
$$=E(\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}\times\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}^c)$$

[8] 只要考虑把 n 个顶点 Ω 分割成两个互质的子集 Ω_1，$\Omega_1^c(\Omega_1\cup\Omega_1^c=\Omega)$ 的组合数就可以了。Ω_1 的顶点数为 1 个的情况，2 个的情况，…，$(n-1)$ 个的情况，所以总数为 $nC_1+nC_2+\cdots+nC_{n-1}=(nC_0+nC_1+\cdots+nC_{n-1}+nC_n)-(nC_0+nC_n)=2^n-2$。这里，由于同一分割被包含两次，所以实际上是 $(2^n-2)/2=2^{n-1}-1$。

[9]

$$A=\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\\5\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}a&b&c&d&e&f&g\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&1\\0&1&0&1&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

[10] $Q_1=Q(1)=\{a, b, c\}$

$Q_2=Q(2)=\{c, d, e\}$

$Q_3=Q(3)=\{a, g\}$

$Q_4=Q(4)=\{e, f, g\}$

$Q_5=Q(5)=\{b, d, f\}$

$Q_6=Q(1)\oplus Q(2)=\{a, b, d, e\}$

$Q_7=Q(1)\oplus Q(3)=\{b, c, g\}$

$Q_8=Q(1)\oplus Q(4)=\{a, b, c, e, f, g\}$

$Q_9=Q(2)\oplus Q(3)=\{a, c, d, e, g\}$

$Q_{10}=Q(2)\oplus Q(4)=\{c, d, f, g\}$

$$Q_{11}=Q(3)\oplus Q(4)=\{a,\ e,\ f\}$$

$$Q_{12}=Q(1)\oplus Q(2)\oplus Q(3)=\{b,\ d,\ e,\ g\}$$

$$Q_{13}=Q(1)\oplus Q(2)\oplus Q(4)=\{a,\ b,\ d,\ f,\ g\}$$

$$Q_{14}=Q(1)\oplus Q(3)\oplus Q(4)=\{b,\ c,\ e,\ f\}$$

$$Q_{15}=Q(2)\oplus Q(3)\oplus Q(4)=\{a,\ c,\ d,\ f\}$$

$$Q_{16}=Q(1)\oplus Q(2)\oplus Q(3)\oplus Q(4)=Q(5)$$

互质割集的并集，除去Q_8，Q_9，Q_{13}，Q_{14}之外，全部是G的割集。按3.4节所述，割集矩阵是容易得出的，故予以省略。

[11] 设对应于$|A_m|\neq 0$的G的最大阶数子矩阵A_m的子图为H。显然，H有$(n-1)$条边和n个顶点。如果H不是连通的，则H的秩$<n-1$，与H的秩$=A_m$的秩$(=n-1)$相矛盾。因此，H是连通的，根据定义，H是树。

[12] 基底割集矩阵为

$$Q=\begin{array}{c}\\ S_1\\ S_2\\ S_3\\ S_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}a & b & c & d & e & f & g & h\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccccc}-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right]\end{array}$$

设独立的关联集合为$Q(1)$，$Q(2)$，$Q(3)$，$Q(5)$，则基底关联矩阵为

$$A=\begin{array}{c}\\ Q(1)\\ Q(2)\\ Q(3)\\ Q(5)\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccccc}a & b & c & d & e & f & g & h\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccccccc}-1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right]\end{array}$$

这里，$\bar{S}_1=-\overline{Q(2)}-\overline{Q(3)}-\overline{Q(5)}$，　$\bar{S}_2=-\overline{Q(1)}-\overline{Q(2)}$，　$\bar{S}_3=\overline{Q(3)}+\overline{Q(5)}$，$\bar{S}_4=-\overline{Q(5)}$，于是

$$D=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

[13] 57 种。

[14] 设G有n个顶点和b条边。AA^t的(i, j)元素$=\sum_{k=1}^{b} a_{ik}a_{jk}$。因此，$(i, i)$元素$=\sum_{k=1}^{b}(a_{ik})^2$。只有当边$e_k$关联于顶点$i$时，$a_{ik}=1$或$-1$，因而$(a_{ik})^2=1$；所以$\sum_{k=1}^{b}(a_{ik})^2=$关联于顶点$i$的边的总数。而$(i, j)$元素$(i\neq j)=\sum_{k=1}^{b}a_{ik}a_{jk}$；对于$a_{ik}a_{jk}$，只有当边$e_k$与顶点$i$，$j$都关联时，才有$a_{ik}=1$，$a_{jk}=-1$，或$a_{ik}=-1$，$a_{jk}=1$，故$a_{ik}a_{jk}=-1$；除此以外，所有的$a_{ik}a_{jk}=0$。所以

$$\sum_{k=1}^{b}a_{ik}a_{jk}=-(\text{关联于顶点 } i, j \text{ 的边的总数})$$

[15] 只要求出由n个顶点构成的完备图的树的总数就行了。将完备图的所有的边加上适当的方向，计算出$|AA^t|$就可以了。现在，假定顶点v_n为参考点，利用习题 14，则可得

$$AA^t=\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & \cdots & \cdots & v_{n-1} \end{array} \\ \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{bmatrix} \end{array}$$

为了计算$|AA^t|$，可利用这样的性质，即无论从第 1 行还是从第$(n-2)$行等各行中减去第$(n-1)$行，$|AA^t|$的值都不变（参阅附录 1.8）。所以

$$|AA^t| = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & n & \cdots & 0 & -n \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & n & -n \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{bmatrix}$$

其次，若把前面的$(n-2)$列加到最后面的第$(n-1)$列上，则

$$|AA^t| = \left.\begin{bmatrix} \overbrace{n \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{n-2} & 0 \\ 0 \quad n & \vdots \\ \vdots \quad\quad \ddots & \vdots \\ 0 \quad\quad\quad n & \vdots \\ -1 \quad -1 \quad \cdots \quad -1 & 1 \end{bmatrix}\right\} n-1$$

因此

$$|AA^t| = \overbrace{n \cdot n \cdot n \cdot \cdots \cdot n}^{n-2} \cdot 1 = n^{n-2}$$

[16] 由于 $Q = DA$ ($|D| \neq 0$)，所以 Q 的正则最大阶数子行列式为$\pm|D|$。

$$\begin{aligned} |QQ^t| &= \sum |\text{对应于 } Q \text{ 和 } Q^t \text{ 的最大阶数子矩阵的积}| \\ &= (|D|)^2(\text{树的总数}) \end{aligned}$$

[17] 假定G有 b 条边，则 $\begin{bmatrix} A \\ B_f \end{bmatrix}$是 b 阶方阵。不过

$$\begin{vmatrix} A \\ B_f \end{vmatrix} \cdot \left|\begin{bmatrix} A \\ B_f \end{bmatrix}^t\right| \underset{\text{附录推论I}}{\overset{\uparrow}{=}} \left|\begin{bmatrix} A \\ B_f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ B_f \end{bmatrix}^t\right| = \begin{vmatrix} AA^t & AB_f^t \\ B_fA^t & B_fB_f^t \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} A^tA & 0 \\ 0 & B_fB_f^t \end{vmatrix} \\ &= |AA^t| \cdot |B_fB_f^t| \\ &= (\text{树的总数}) \cdot (\text{补树的总数}) \end{aligned}$$

因为树的总数＝补树的总数，$\left|\begin{matrix}A\\B_f\end{matrix}\right| = \left|\begin{bmatrix}A\\B_f\end{bmatrix}^t\right|$，所以

$$\left|\begin{matrix}A\\B_f\end{matrix}\right| = \pm(G\text{ 的树的总数})$$

[18]

$$T = \begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\end{matrix}\\ \begin{bmatrix} d & 4 & 3 & 4 & 3 & 4\\ 4 & d & 3 & 5 & 3 & 4\\ 3 & 3 & d & 3 & 3 & 3\\ 4 & 5 & 3 & d & 3 & 4\\ 3 & 3 & 3 & 3 & d & 3\\ 4 & 4 & 3 & 4 & 3 & d\end{bmatrix}\end{array}$$

第四章

[1] (1)→(2) 由树的定义得出。

(2)→(3) 暂且设树包含回路。此时尽管把回路上的某一条边去掉，图仍连通着且有 n 个顶点和 $(n-2)$ 条边。在连通图上，把一条边短接掉，顶点数仅仅减少 1，所以，若在这个有 n 个顶点和 $(n-2)$ 条边的图上将这种短接处理一直进行 $(n-2)$ 次，最后应得到没有边而仅由两个顶点构成的连通图，这是矛盾的。因此，树不含有回路。

(3)→(4) 设满足条件(3)的子图为 H，H 由 k ($\geqslant 1$) 个连通片 H_i ($i=1, 2, \cdots, k$)组成，各个 H_i 有 b_i 条边。由于在 H 上没有回路，所以 H_i 也没有回路，因此各个 H_i 至少有 b_i+1 个顶点。故 H 的顶点数 $\leqslant \sum_{i=1}^{k}(b_i+1) = (b_1+b_2+\cdots+b_k)+k = (n-1)+k$。因为 H 有 n 个顶点，所以 $n \leqslant (n-1)+k \leqslant n$，即 $k=1$。

(4)→(5) 假定在 H 的任意两个顶点之间，譬如 i, j 之间至少存在两条不同的路径 P_1, P_2。以顶点 i 作为始点的路径 P_1 与

路径 P_2 相交，且设最初的交点为 u，交点 u 的后面的顶点不在 P_2 上，而在 P_1 上。再把 P_1 与 P_2 在 u 的后面相交的顶点设为 v，则 u, v 之间不存在公共边的这两条不同的路径便形成了回路。这也就是说，H 中存在着回路。这是矛盾的。所以命题(4)与(5)是等价的。

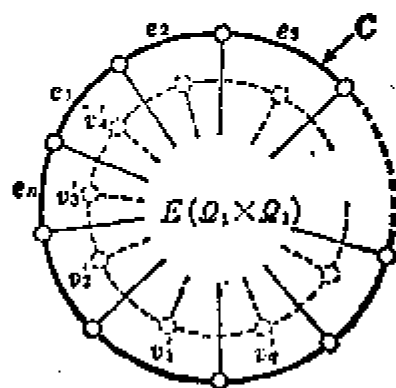
(5)→(2) 由于在 H 的任何两个顶点之间都只存在唯一的路径，所以 H 是连通的。然后用归纳法证明 H 具有 $n-1$ 条边。H 有两个顶点的情况是最明显的。假设对于顶点数小于 n 的图，边数比顶点数少 1 这一点是正确的。当从 H 中去掉任一条边时，便形成两个连通片。设两个连通片的顶点数分别为 n_1, n_2，则根据假定，每个连通片分别有 (n_1-1)，(n_2-1) 条边。若再把被去掉的边恢复到原来的图上，则又成为 H，边数就为 $(n_1-1)+(n_2-1)+1=(n_1+n_2)-1=n-1$。

[2] (1) 设平面图 G 的回路为 $C=\{e_1, e_2, \cdots, e_p\}$。若设与 G^* 中 C 的各边对应的边为 $e_1', e_2', \cdots, e_p'$，则只要证明 $\{e_1', e_2', \cdots, e_p'\}$ 为 G^* 的割集就行了。

首先，设 C 的内部区域为 $f_1, f_2, \cdots, f_q$，对应于这些区域的 G^* 的顶点为 $v_1', v_2', \cdots, v_q'$。若令 $\Omega_1=\{v_1', v_2', \cdots, v_q'\}$，则

$$E(\Omega_1\times\overline{\Omega_1})=\{e_1', e_2', \cdots, e_p'\}$$

$E(\Omega_1\times\overline{\Omega}_1)$ 分割 G^*，即 $G^*-E(\Omega_1\times\overline{\Omega}_1)$ 至少由两个连通片组成。因此，$E(\Omega_1\times\overline{\Omega}_1)$ 是割集或互质割集的并集。其次，让我们证明分别由 $E(\Omega_1\times\Omega_1)$ 和 $E(\overline{\Omega}_1\times\overline{\Omega}_1)$ 组成的子图是连通的。先设由 C 及其内部区域所组成的 G 的子图为 H_1(解图 4.1)。$E(\Omega_1\times\Omega_1)$ 的图，跟把 H_1 上 C 的所有边短接而看作一个点的图的对偶图等同。由第二章的习题



解图 4.1

7 已经证明，对偶图是连通的，所以 $E(\Omega_1\times\Omega_1)$的图是连通的。同样，$E(\Omega_1\times\Omega_1)$也是连通的。故$E(\Omega_1\times\overline{\Omega}_1)=\{e'_1,e'_2,\cdots,e'_p\}$是 G^* 的割集。

（2）若设G的割集为 $Q=\{e_1, e_2,\cdots, e_p\}$，则只要证明对应于 $e_1, e_2,\cdots,e_p$ 的 G^*的边 $e'_1, e'_2,\cdots, e'_p$ 为回路就可以了。

当G为连通的平面图时，若把对应于G的割集的 G^*的边依次联接起来，就形成回路，这是显而易见的。当G不是连通图时，只要利用下述办法就可以了：先作出其对偶图 G^*，再考虑 G^* 的对偶图，就可得出$(G^*)^*$ 的割集或G的割集。

[3] 由于连通欧拉图E的各个顶点的次数是偶数，所以每个顶点至少关联着两条边。现考虑从E的任一顶点出发的通过该顶点的闭边列 E_1。不言而喻，E_1 是欧拉子图，所以 $E-E_1$ 也是欧拉子图。如果 $E-E_1\neq\phi$，就跟上述一样，在 $E-E_1$ 中存在闭边列 E_2。将这样的处理继续进行下去，便可得像 $E=E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n$ 那样的闭边列（连通的欧拉子图）$E_1, E_2, \cdots, E_n$ $(n\geqslant1)$。E 的边分别包含于 n 个闭边列的每一个之中。

其次，接着证明由这 n 个闭边列能得到一个包含全部边的闭边列。取任一个 E_i，E_i 是连通的，即至少有一个另外的闭边列，这个闭边列至少有一个顶点是公共顶点（设为 v_i）。在闭边列上无论从哪个顶出发，都能够通过所有的边而回到原来的出发点。故以 E_i 和 E_j 的公共顶点 v_i 作为始点，先通过 E_i 的所有的边，返回到 v_i，接着通过 E_j 的所有的边，最后仍能够返回到 v_i，由此得到一个通过 E_i 和 E_j 的所有的边的闭边列。进而，像 $E_i\cup E_j$ 那样至少有一个公共顶点的另外的闭边列，在 $E_1, E_2,\cdots, E_{i-1}, E_{i+1},\cdots,E_{j-1},E_{j+1},\cdots,E_n$ 中至少存在一个。若设这种闭边列为 E_k，则和前述一样，可得通过 $E_i\cup E_j\cup E_k$ 的所有边的一个闭边列。如此继续下去，最后就得出包含 $E_1\cup E_2\cup\cdots\cup E_n$ 的全部边的闭边列。

[4] 现设G的奇数次数的顶点为 v_i, v_j, 并在 v_i 与 v_j 之间联接上新的边 e_{ij},则 $G\cup\{e_{ij}\}$ 成为欧拉子图。由本章习题[3] 可知,在 $G\cup\{e_{ij}\}$ 上存在包含这个图的全部边的闭边列。而且对于这个闭边列,以 v_i 作为始点,最后能够通过 e_{ij} 返回到 v_i (为什么?)。若从这个闭边列上去掉 e_{ij}, 便成为和G一样,从而得出以 v_i 为始点、以 v_j 为终点(或者相反)的一笔画。

[5] (a) 譬如 $dgbchefa$。 (b) 譬如 $dabcefhgi$。

[6] 譬如,若取树为$\{a, d, g\}$, 则可得独立的回路集合$\{a, d, e\}$,$\{a, d, f\}$,$\{d, g, c\}$,$\{d, g, b\}$,$\{a, d, g, h\}$五个回路。考虑这五个集合的所有可能的组合(全部共 25 个),进行⊕运算就可以了。

[7] 当联接于顶点 i 的 P_1 和 P_2 的边为同一个边时,在 $P_1\oplus P_2$ 中顶点 i 的次数 $d(i)=0$;当联接的边为不同的边时,$d(i)=2$。同样,$d(j)$或是 0, 或是 2。假如 P_1 和 P_2 在 i, j 以外有共同的顶点时,$P_1\oplus P_2$ 对于 i, j 以外的顶点来说,所有顶点的次数都是 2;根据定义,$P_1\oplus P_2$ 是欧拉子图。另一方面,P_1 与 P_2 在 i, j 以外有公共顶点 k 的情况下,在 $P_1\oplus P_2$ 中顶点 k 的次数 $d(k)=4-2r$, 这里 r 是在联接于顶点 k 的边中 P_1 与 P_2 共同的边数。在 $P_1\oplus P_2$ 中除去公共顶点以外的顶点的次数都是 2。因此,不论哪种情况,在 $P_1\oplus P_2$ 中,顶点的次数都是偶数(也包括 0),所以 $P_1\oplus P_2$ 为欧拉子图。

[8] 在 $\boldsymbol{B}_a$ 中包含着把对应于各个连通片的基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}_{f_{i12}}$ $(1\leqslant i\leqslant\rho)$作为子矩阵的下列基本回路矩阵 $\boldsymbol{B}_f$。

$$\boldsymbol{B}_f=\left[\begin{array}{cccc:cccc} \boldsymbol{U}_1 & & & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_{f_{112}} & & & \\ & \boldsymbol{U}_2 & & & & \boldsymbol{B}_{f_{212}} & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \boldsymbol{U}_\rho & & & & \boldsymbol{B}_{f_{\rho12}} \end{array}\right]$$

因此，$r(B_e) \geqslant b-n+\rho$。另一方面，设包含$\rho$个连通片的$G$的关联矩阵为$A$，则$r(A)=n-\rho$。因此，若对$AB_e^t=0$应用西尔威斯特定理，则有

$$0=r(AB_e^t) \geqslant r(A)+r(B_e^t)-b$$

因而
$$r(B_e^t) \leqslant b-n+\rho$$

所以

$$r(B_e^t)=b-n+\rho$$

[9] 必要条件：若把B这样分块，使其最前面的$(b-n+1)$列代表G的补树，则$B=[B_{11} \quad B_{12}]$。这里，B_{11}的列代表补树。把G的基底关联矩阵A按B的列的顺序进行排列，A便分块成$A=[A_{11} \quad A_{12}]$。A_{11}及A_{12}的列分别代表补树和树，所以$|A_{12}| \neq 0$。可是，$BA^t=0$（以2为模）。故

$$BA^t=[B_{11} \quad B_{12}]\begin{bmatrix} A_{11}^t \\ A_{12}^t \end{bmatrix}=B_{11}A_{11}^t+B_{12}A_{12}^t=0$$

所以

$$B_{12}=B_{11}A_{11}^t(A_{12}^t)^{-1} \qquad （以2为模）$$

因此

$$B=B_{11}[U \quad A_{11}^t(A_{12}^t)^{-1}]$$

由于B是基底回路矩阵，所以$r(B)=b-n+1$，因而$|B_{11}| \neq 0$。

充分条件：使B与A的列按同一顺序排列，$B=[B_{11} \quad B_{12}]$，$A=[A_{11} \quad A_{12}]$，且$|B_{11}| \neq 0$。由于$BA^t=0$，所以

$$A=A_{12}[B_{12}^t(B_{11}^{-1})^t \quad U]$$

并且

$$r(A)=n-1$$

故
$$|A_{12}| \neq 0$$

因此，A_{12}的列代表G的树，所以B_{11}的列代表补树。

[10] 当$T_1=\{a, b, c, d\}$时

$$
\boldsymbol{B}_f=[\boldsymbol{U}\quad \boldsymbol{B}_{f12}]=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e & f & g & h & i & j & a & b & c & d \end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

因此 $\boldsymbol{Q}_f=[\boldsymbol{B}_{f12}^t\quad \boldsymbol{U}]$，所以

$$
\boldsymbol{Q}_f=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} e & f & g & h & i & j & a & b & c & d \end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccc:cccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

对应于 $T_2=\{a,\ b,\ h,\ i\}$，G 的基本回路矩阵为

$$
\boldsymbol{B}_f=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} c & d & e & f & g & j & a & b & h & i \end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccc:cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

所以

$$
\boldsymbol{Q}_f=
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} c & d & e & f & g & j & a & b & h & i \end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccc:cccc}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

[11]　$T_1=\{b,\ c,\ f,\ e\}$时，补树 $T_1^c=\{a,\ d,\ g,\ h\}$。

$$
B_f=\begin{array}{c}c_a\\c_d\\c_g\\c_h\end{array}\overset{\begin{array}{cccccccc}a&d&g&h&b&c&e&f\end{array}}{\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&-1&0&-1\\0&0&0&1&0&0&1&1\end{array}\right]}
$$

对于 $T_2=\{a,\ b,\ d,\ g\}$，

$$
B_f=\begin{array}{c}c_c\\c_e\\c_f\\c_h\end{array}\overset{\begin{array}{cccccccc}c&e&f&h&a&b&d&g\end{array}}{\left[\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&1&0&0\\0&1&0&0&0&1&1&0\\0&0&1&0&-1&-1&0&-1\\0&0&0&1&1&0&-1&1\end{array}\right]}
$$

第五章

[1] 若将树取作$\{v_1,\ v_4,\ v_6\}$，则补树的电流为$\{i_2,\ i_3,\ i_5\}$。因此

$$
I_c=\begin{bmatrix}i_2\\i_3\\i_5\\i_1\\i_4\\i_6\end{bmatrix}=B_f^t I_c=\overset{\begin{array}{cccccc}i_2&i_3&i_5&i_1&i_4&i_6\end{array}}{\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1&-1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&-1\end{bmatrix}}^t\begin{bmatrix}i_2\\i_3\\i_5\end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix}i_2\\i_3\\i_5\\-i_2\\-i_2+i_3\\-i_2+i_3-i_5\end{bmatrix}
$$

[2] 设N中$(b-2)$个电阻中的某个电阻为 R_j $(j=3,\ 4,\cdots,\ b)$，R_j 上的电压和电流为 v_j，i_j $(j=3,\ 4,\cdots,\ b)$。利用例题 2，

根据戴勒亨扩展定理，$\sum_{k=1}^{b} v_k \hat{i}_k = \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_k i_k$，可得

$$v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 + \sum_{j=3}^{b} v_j \hat{i}_j = \hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2 + \sum_{j=3}^{b} \hat{v}_j i_j$$

这里，$v_j = R_j i_j$，$\hat{v}_j = \hat{R}_j \hat{i}_j$ $(j = 3, 4, \cdots, b)$，所以

$$v_1 \hat{i}_1 + v_2 \hat{i}_2 = \hat{v}_1 i_1 + \hat{v}_2 i_2$$

因此
$$6 \times 1.5 + 2 \cdot \hat{i}_2 = 3 \times 2 + (\hat{R}_2 \hat{i}_2) \cdot \frac{v_2}{R_2}$$

所以
$$\hat{i}_2 = -3\text{A} \quad \hat{v}_2 = -3\text{V}$$

[3] 设策动点阻抗为 $Z_{in}(j\omega)$，则

$$V_1 = -J_1 Z_{in}(j\omega)$$

现在，设N中有$(b-1)$个阻抗元件，则

$$V_k = Z_k I_k \quad (k = 2, 3, \cdots, b)$$

根据戴勒亨定理，得

$$V_1 J_1 + V_2 I_2 + V_3 I_3 + \cdots + V_b I_b = 0$$

这里，元件上的电压与电流用有效值表示。

从电源发出的功率为

$$P = -V_1 J_1 = \sum_{k=2}^{b} V_k I_k$$

若将 $V_1 = -J_1 Z_{in}(j\omega)$，$V_k = Z_k I_k$ 代入，则得

$$P = |J_1|^2 Z_{in}(j\omega) = \sum_{k=2}^{b} V_k \bar{I}_k = \sum_{k=2}^{b} Z_k(j\omega) |I_k|^2$$

如果把N中的阻抗分为电阻，电感，电容，把上式右边改写，则

$$P = \sum_r R_r |I_r|^2 + \sum_s j\omega L_s |I_s|^2 + \sum_t \frac{1}{j\omega C_t} |I_t|^2$$

在N的电阻上消耗的功率为

$$P_{dis} = \sum_r R_r |I_r|^2$$

在N的电感中储存的平均磁场能量为

$$E_m = \sum_s \frac{1}{2} L_s |I_s|^2$$

在N的电容中储存的平均电场能量为

$$E_e = \sum_t \frac{1}{2} C_t |V_t|^2 = \sum_t \frac{|I_t|^2}{2\omega^2 C_t}$$

因此
$$Z_{in}(j\omega) = \frac{P_{diss} + j2\omega(E_m - E_e)}{|J_1|^2}$$

[4] 由节点电压法，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}_e\boldsymbol{A}^t)\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J}_s$；若设节点导纳矩阵为 $\boldsymbol{Y}_n$，则 $\boldsymbol{Y}_n\boldsymbol{V}_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J}_s$。现在 $\boldsymbol{Y}_n$ 变为 $\boldsymbol{Y}_n + \delta\boldsymbol{Y}_n$，$\boldsymbol{V}_n$ 变为 $\boldsymbol{V}_n + \delta\boldsymbol{V}_n$，而 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{J}_s$ 没有变化，所以$(\boldsymbol{Y}_n + \delta\boldsymbol{Y}_n)(\boldsymbol{V}_n + \delta\boldsymbol{V}_n) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{J}_s$。因此

$$\boldsymbol{Y}_n(\delta\boldsymbol{V}_n) + (\delta\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{V}_n + (\delta\boldsymbol{Y}_n)(\delta\boldsymbol{V}_n) = 0$$

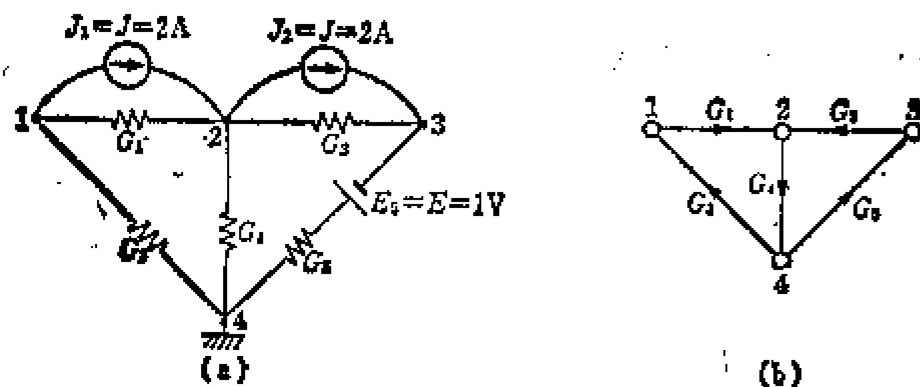
若忽略二次项，则成为 $\boldsymbol{Y}_n(\delta\boldsymbol{V}_n) = -(\delta\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{V}_n$。因此

$$\delta\boldsymbol{V}_n = -\boldsymbol{Y}_n^{-1}(\delta\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{V}_n$$

又
$$\boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{A}^t\boldsymbol{V}_n$$

故
$$\delta\boldsymbol{V}_e = \boldsymbol{A}^t\delta\boldsymbol{V}_n = -\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{Y}_n^{-1}(\delta\boldsymbol{Y}_n)\boldsymbol{V}_n$$

[5] 首先，把电流源并联到电阻上，电路图变换成如解图5.1(a)所示。把该电路的图作成同图(b)，则



解图5.1

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}_e\boldsymbol{A}^t =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1 & & & & 0 \\ & G_2 & & & \\ & & G_3 & & \\ & & & G_4 & \\ 0 & & & & G_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} G_1+G_3 & -G_1 & 0 \\ -G_1 & G_1+G_2+G_4 & -G_2 \\ 0 & -G_2 & G_2+G_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AJ_s}-\boldsymbol{AG_eE_s}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -J_1 \\ J_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_1 & & & & 0 \\ & G_2 & & & \\ & & G_3 & & \\ & & & G_4 & \\ 0 & & & & G_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -E_5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -J_1 \\ J_1-J_2 \\ J_2-G_5E_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故节点电压方程为

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{14} \\ v_{24} \\ v_{34} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} v_{14} \\ v_{24} \\ v_{34} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{41}\begin{bmatrix} 11 & 3 & 2 \\ 3 & 12 & 8 \\ 2 & 8 & 19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=\frac{1}{41}\begin{bmatrix} -20 \\ 2 \\ 15 \end{bmatrix}$$

〔6〕 式(5.62)为$(\boldsymbol{B_fR_eB_f^t})\boldsymbol{I_l}=\boldsymbol{B_fE_s}-\boldsymbol{B_fR_eJ_s}$

若用对应于电路的有向图的边代表电阻，则由图 5.25(b) 的补树所得的基本回路矩阵如下式所示：

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccc} R_2 & R_3 & R_6 & R_1 & R_4 & R_5 & R_7 \end{array} \\
B_f = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

于是

$$
(B_f R_e B_f^t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

$$
\times \begin{bmatrix} R_2 & & & & & & \\ & R_3 & & & & 0 & \\ & & R_6 & & & & \\ & & & R_1 & & & \\ & & & & R_4 & & \\ & 0 & & & & R_5 & \\ & & & & & & R_7 \end{bmatrix}
$$

$$
\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^t
$$

$$
= \begin{bmatrix} R_2 + R_4 + R_5 & R_4 & -R_4 - R_5 \\ R_4 & R_1 + R_3 + R_4 & -R_1 - R_4 \\ -R_4 - R_5 & -R_1 - R_4 & R_1 + R_4 + R_5 + R_6 + R_7 \end{bmatrix}
$$

$$
B_f E_s - B_f R_e J_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -E_2 \\ 0 \\ -E_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} R_2 & & & & & & \\ & R_3 & & & 0 & & \\ & & R_6 & & & & \\ & & & R_1 & & & \\ & & & & R_4 & & \\ & 0 & & & & R_5 & \\ & & & & & & R_7 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ J_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
=\begin{bmatrix} -E_2 \\ 0 \\ -E_6 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} R_4J_4 \\ R_4J_4 \\ -R_4J_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -E_2-R_4J_4 \\ -R_4J_4 \\ -E_6+R_4J_4 \end{bmatrix}
$$

第六章

[1] (a) D_1: {[(*a*),(*d*),(*e*)],[(*b*),(*c*),(*f*)]}

D_2: {[(*a*),(*b*)][(*g*)]}

D_3 及 D_3 以上无

(b) D_1: {[(*b*),(*c*),(*f*),(*g*)]}

D_2: {[(*b*),(*e*),(*c*)][(*h*)],[(*a*)][(*d*),(*f*),(*g*)]}

D_3: {[(*a*)][(*d*),(*e*)][(*h*)]}

D_4 及 D_4 以上无

(c) D_1 无

D_2: {[(*a*)][(*d*),(*f*),(*r*),(*g*)]}

D_3 无

D_4: {[(*a*)][(*d*),(*e*)][(*h*)][(*s*)]}

D_5 无

(d) D_1: {[(*b*),(*d*),(*e*)]}

D_2: {[(*a*)][(*d*),(*f*)]}

D_3: {[(*a*)][(*c*)][(*g*)]}

(e) D_1: $\{[(b),(c),(h),(r),(t)]\}$

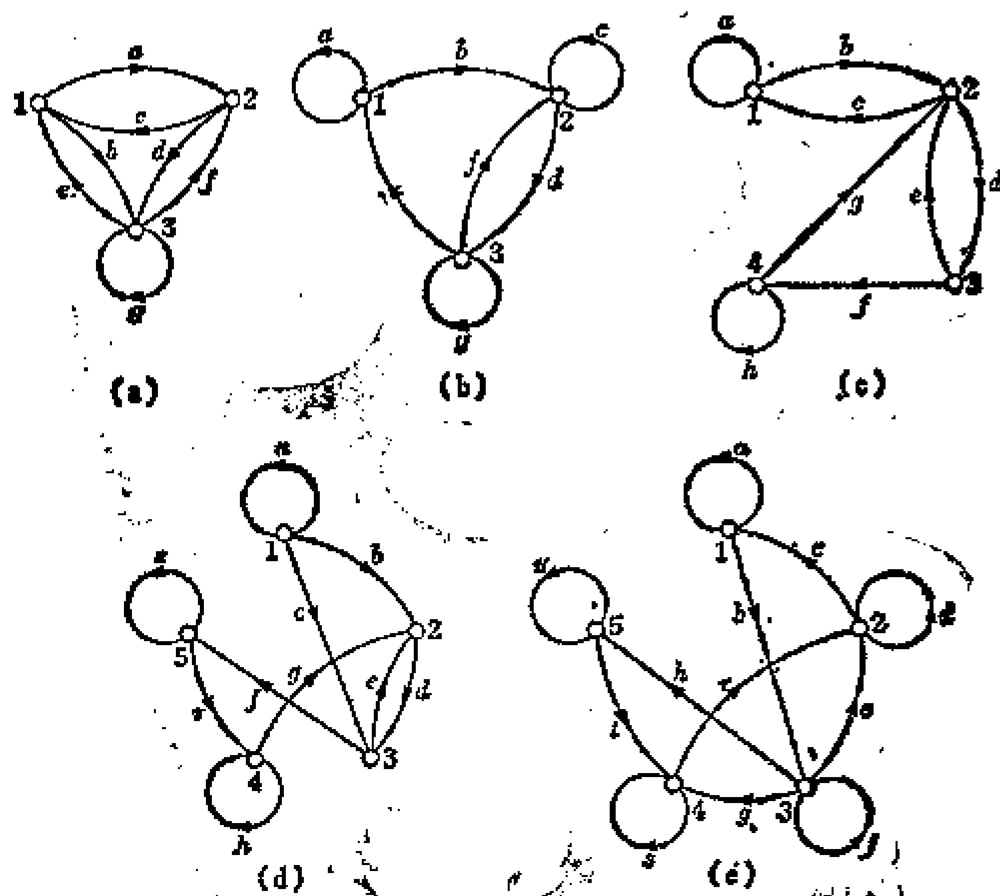
D_2: $\{[(b),(c),(g),(r)][(u)]\}$

D_3: $\{[(b),(c),(e)][(u)][(s)]\}$

D_4 无

D_5: $\{[(a)][(d)][(f)][(s)][(u)]\}$

[2] 设矩阵 **C** 的行(及列)的编号为 1,2,…, 各矩阵的图如解图 6.1(a),(b),(c),(d),(e)所示。



解图 6.1

(a) D_1: $\{[(a),(d),(e)],[(b),(c),(f)]\}$

D_2: $\{[(a),(c)][(g)]\}$

所以

$$|\boldsymbol{C}| = (-1)^3\{(-1)[(a)(d)(e)] + (-1)[(b)(c)(f)] + (-1)^2[(a)(c)][(g)]\}$$
$$= ade + bcf - acg$$

同样，其他各矩阵的行列式分别为

$$\text{(b)}\quad |\boldsymbol{C}|=(-1)^3\{(-1)[(b)(d)(e)]+(-1)^2[(a)]\times[(d)(f)]+(-1)^2[(a)][(c)][(g)]\}$$

$$\text{(c)}\quad |\boldsymbol{C}|=(-1)^4\{(-1)^2[(a)][(d)(f)(g)]+(-1)^3[(a)][(d)(e)][(h)]\}$$

$$\text{(d)}\quad |\boldsymbol{C}|=(-1)^5\{(-1)^2[(a)][(d)(f)(r)(g)]+(-1)^4[(a)][(d)(e)][(h)][(s)]\}$$

$$\text{(e)}\quad |\boldsymbol{C}|=(-1)^6\{(-1)^1[(r)(c)(b)(h)(t)]+(-1)^2[(b)(c)(g)(r)][(u)]+(-1)^3[(b)(c)(e)][(s)][(u)]+(-1)^5[(a)][(d)][(f)][(s)][(u)]\}$$

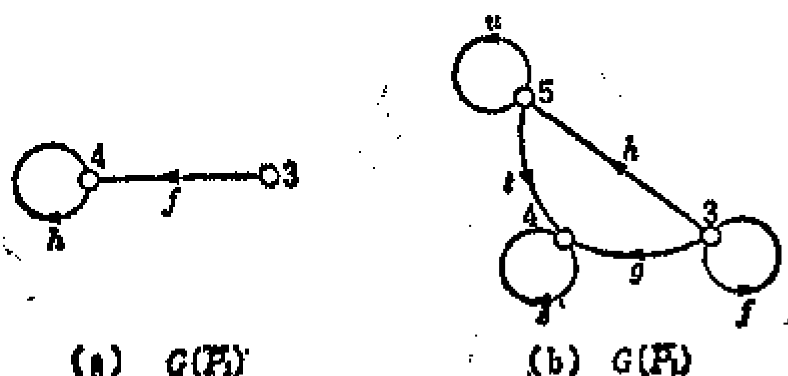
[3] (a) 从顶点 2 到顶点 1 的路径仅是 $P_1=(c)$ 和 $P_2=(d, e)$。$G(\overline{P_1})$是顶点 3 的自环，所以 $(-1)^{m'}$ ($G(\overline{P_1})$ 的全顶点循环 $D_{m'}$ 的积) 是 $(-1)^1[(g)]$。而 $G(P_2)$ 成为空图，所以，$(-1)^{m'}$($G(\overline{P_2})$的全顶点循环的积)是 1。于是

$$C_{12}=(-1)^{3-1}\{(c)(-1)[(g)]+((d)(e))(1)\}$$
$$=-cg+de$$

(b) P_{21} 仅是 $P_1=(d, e)$。$G(\overline{P_1})$为空图，所以

$$C_{12}=(-1)^{3-1}\{(d)(e)(1)\}=de$$

(c) P_{21} 仅是 $P_1=(c)$，$G(\overline{P_1})$成为解图 6.2(a)，$G(\overline{P_1})$不存



(a) $G(\overline{P_1})$　　(b) $G(\overline{P_1})$

解图 6.2

在全顶点循环，所以$(-1)^{m'}$($G(\overline{P}_1)$的全顶点循环$D_{m'}$的积)是0。故$C_{12}=0$。

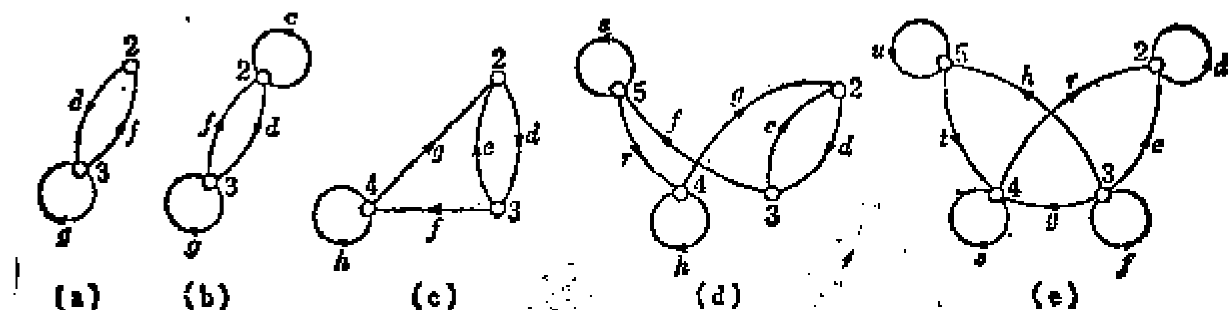
(d) 因为不存在P_{21}，所以$C_{12}=0$。

(e) P_{21}仅是$P_1=(c)$，$G(\overline{P}_1)$成为解图6.2(b)所示的图。$G(\overline{P}_1)$的全顶点循环仅是三个自环，所以

$$C_{12}=(-1)^{5-1}\{(c)(-1)^3[(f)][(s)][(u)]\}$$
$$=-cfsu$$

[4] (a) $G(\mathrm{I})$[解图6.3(a)]的全顶点循环$D_{m'}$仅是$[(d),(f)]$，所以

$$C_{11}=(-1)^{3-1}(-1)^1\{[(d)(f)]\}=-df$$



解图6.3

(b) 由同图(b)，有两个全顶点循环：$D_{1'}=[(f)(d)]$，$D_{2'}=[(c)][(g)]$。所以

$$C_{11}=(-1)^{3-1}\{(-1)^1[(f)(d)]+(-1)^2[(c)][(g)]\}$$
$$=cg-df$$

(c) 由同图(c)，$D_{1'}=[(d),(f),(g)]$，$D_{2'}=[(d),(e)][(h)]$，因此

$$C_{11}=(-1)^{4-1}\{(-1)^1[(d)(f)(g)]$$
$$+(-1)^2[(d)(e)][(h)]$$
$$=dfg-deh$$

(d) 由同图(d)，$D_{1'}=[(d),(f),(r),(g)]$，$D_{2'}=\phi$，$D_{3'}=[(d),(e)][(h)][(s)]$，$D_{4'}=\phi$，所以

$$C_{11}=(-1)^{5-1}\{(-1)^1[(d)(f)(r)(g)]$$
$$+(-1)^2[(d)(e)][(h)][(s)]\}$$
$$=-dfrg-dehs$$

(e) 由同图(e)，$D_{1'}=\phi$，$D_{2'}=\phi$，$D_{3'}=\phi$，$D_{4'}=$ $[(d)][(f)][(s)][(u)]$，所以

$$C_{11}=(-1)^{5-1}\{(-1)^4[(d)][(f)][(s)][(u)]=dfsu$$

[5] 按照克莱姆公式[参阅(附 1.14)、(附 1.15)]，

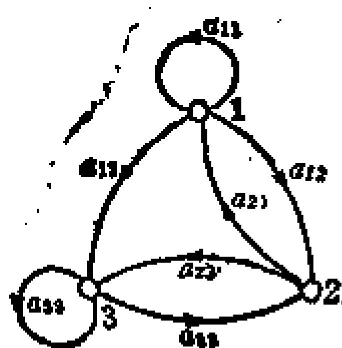
$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}$$

因此，对于(a)的情况，有

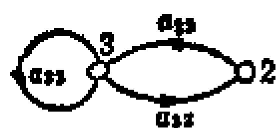
$$x_1=\frac{b_1A_{11}+b_2A_{21}+0\cdot A_{31}}{|A|}$$

$|A|$可求得如下。根据以 A 作为关联矩阵的图[解图 6.4(a)]，$D_1=[(a_{13}),\ (a_{32}),\ (a_{21})]$，$D_2=\{[(a_{12}),\ (a_{21})][(a_{33})]$，$[(a_{11})][(a_{23}),(a_{32})]\}$，$D_3=[\varnothing]$，所以

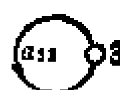
$$|A|=(-1)^3\{(-1)^1[(a_{13})(a_{32})(a_{21})]$$
$$+(-1)^2[(a_{12})(a_{21})][(a_{33})]$$
$$+(-1)^2[(a_{11})][(a_{23})(a_{32})]\}$$
$$=a_{13}a_{32}a_{21}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$



(a) G



(b) $G(\bar{I})$



(c) $G(\bar{P}_1)$; $P_1=(a_{12})$

解图 6.4

对于 A 的余因子 A_{11} 来说，由图 $G(\bar{I})$[解图 6.4(b)]，$G(\bar{I})$

的全顶点循环仅存在 $D_{2}=[(a_{23}),(a_{32})]$，所以

$$A_{11}=(-1)^{3-1}\{(-1)^{1}[(a_{23})(a_{32})]\}=-a_{23}a_{32}$$

对于 A_{21} 来说，首先，作为 G 的 P_{12}，存在 $P_{1}=(a_{12})$ 和 $P_{2}=(a_{13},\ a_{32})$。$G(\overline{P}_{1})$ 成为顶点 3 的自环 $[(a_{33})]$，而 $G(\overline{P}_{2})=\phi$，所以

$$\begin{aligned}A_{21}&=(-1)^{3-1}\{(a_{12})(-1)^{1}[(a_{33})]+(a_{13}a_{32})(1)\}\\&=a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33}\end{aligned}$$

故

$$x_{1}=\frac{-a_{23}a_{32}b_{1}+(a_{13}a_{32}-a_{12}a_{33})b_{2}}{a_{13}a_{32}a_{21}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$

[6] (a)

$$C=\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 0 & x & u\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & y & 0 & 0\\ 4 & 0 & v & z & 0\end{matrix}$$

$$(C+U)^{3}=\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & xy+uv+uzy & x+uz & u\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & y & 1 & 0\\ 4 & 0 & v+yz & z & 1\end{matrix}$$

由 $(C+U)^{3}$ 的 $(i,\ j)$ 元素，得

$$F_{12}=xy+uv+uzy$$

(b)

$$C=\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 0 & x & u\\ 2 & 0 & 0 & y & v\\ 3 & x & y & 0 & z\\ 4 & u & v & z & 0\end{matrix}$$

$$
(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})^3=
\begin{array}{c}
\\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4
\end{array}
\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 & 4 \\
\left[\begin{array}{c} 1 \\ xy+uv+uzy+xzv \\ x+uz+uvy \\ u+xz+xyv \end{array}\right.
& \begin{array}{c} xy+uv+uzy+xzv \\ 1 \\ y+vz+uvx \\ v+yz+xyu \end{array}
& \begin{array}{c} x+uz+uvy \\ y+vz+uvx \\ 1+xuz+yvz \\ z+xu+yv \end{array}
& \left.\begin{array}{c} u+xz+xyv \\ v+yz+xyu \\ z+xu+yv+uzx \\ 1 \end{array}\right]
\end{array}
$$

因此，由$(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})^3$ 的(1,2)元素，得

$$F_{12}=xy+uv+uzy+xzv$$

(c)，(d)的解答省略。

[7] (a)

$$
\begin{array}{c} \\ \\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{U}= \end{array}
\begin{array}{c|cccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
1 & 1 & 0 & x & u \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
3 & 0 & y & 1 & 0 \\
4 & 0 & v & z & 1
\end{array}
$$

$$
(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U})_{21}=(-1)^3
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 0 & x & u \\ y & 1 & 0 \\ v & z & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$=(-1)^3(-xy-uv+uyz)$$

$$=xy+uv-uyz$$

所以 $$F_{12}=xy+uv+uyz$$

(b)

$$
\boldsymbol{C}+\boldsymbol{U}=
\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & x & u \\ 0 & 1 & y & v \\ x & y & 1 & z \\ u & v & z & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$(C+U)_{21}=(-1)^3\begin{array}{c} \\ 1\\ 3\\ 4\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{matrix}2 & 3 & 4\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0 & x & u\\ y & 1 & z\\ v & z & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$=(-1)^3(xzv+uyz-xy-uv)$$

所以

$$F_{12}=xy+uv+xzv+uyz$$

(c)

$$C+U=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & x & y & z\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & v & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t & 1 & 0\\ 0 & w & 0 & u & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$(C+U)_{21}=(-1)^3\begin{array}{c} \\ 1\\ 3\\ 4\\ 5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{matrix}2 & 3 & 4 & 5\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}0 & x & y & z\\ v & 1 & 0 & 0\\ 0 & t & 1 & 0\\ w & 0 & u & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$=v(x+tuz-yt)+wz$$

所以

$$F_{12}=xv+zw+ytv+zutv$$

(d)

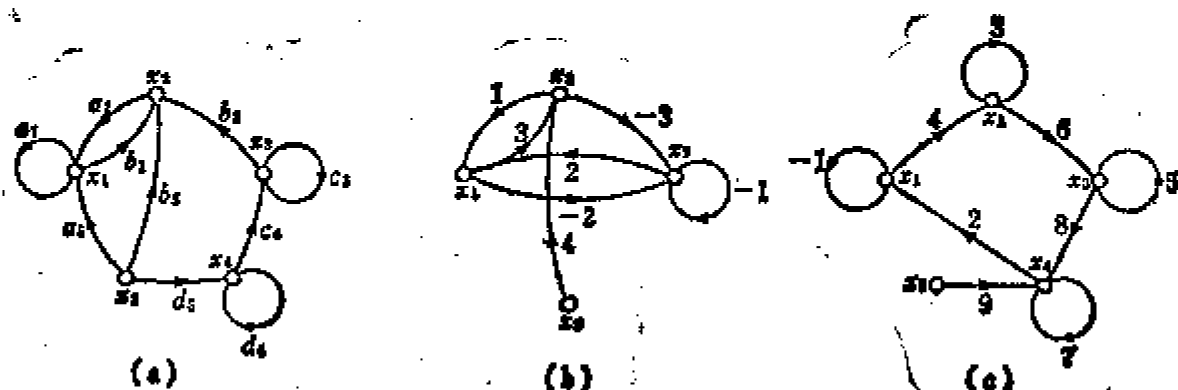
$$C+U=\begin{array}{c} \\ 1\\ 2\\ 3\\ 4\\ 5\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{matrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{matrix}\\ \begin{bmatrix}1 & 0 & x & y & z\\ 0 & 1 & v & 0 & w\\ x & v & 1 & t & 0\\ y & 0 & t & 1 & u\\ z & w & 0 & u & 1\end{bmatrix}\end{array}$$

$$(C+U)_{21}=v(x+tuz-yt-xu)+w(xtu+z-tz-yu)$$

所以 $F_{12}=v(w+xu+tuz+yt)+w(z+zt+yu+xtu)$

第七章

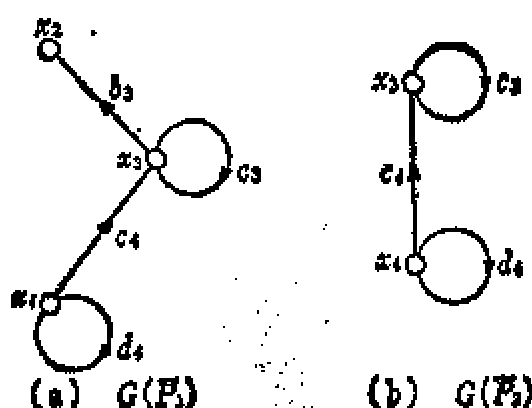
[1] 解图 7.1



解图 7.1

[2] (a)解图 7.2

解图 7.2

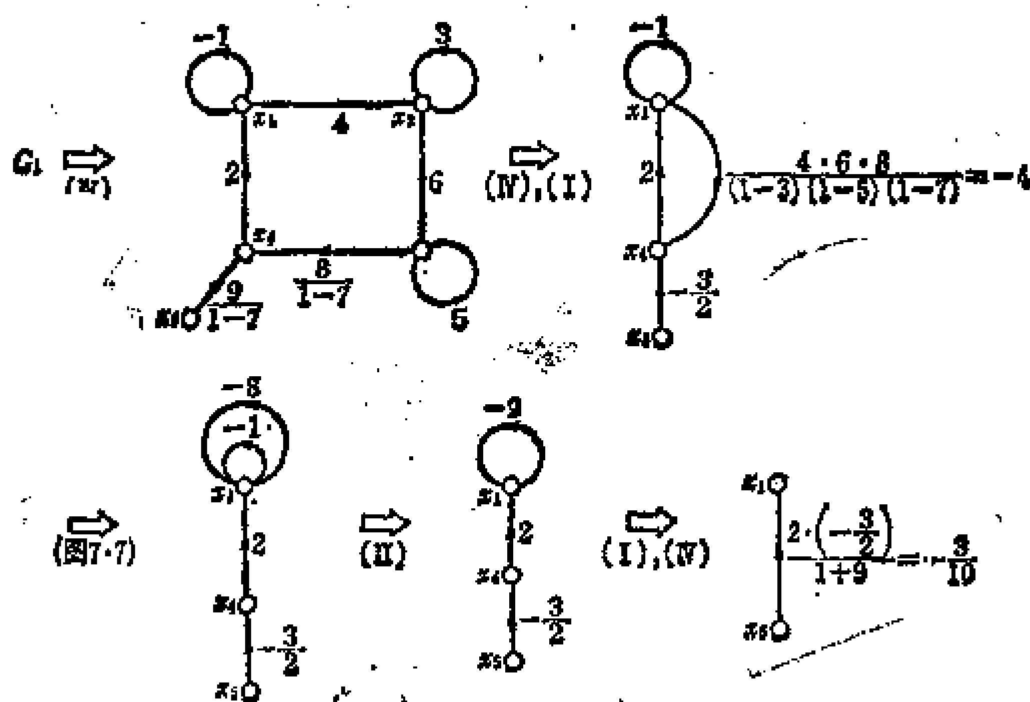


解图 7.3

[3] (a) 由于 G [解图 7.1(a)] 的顺向回路是 $[a_1]$, $[c_3]$, $[d_4]$, $[(a_2), (b_1)]$, 所以 $\sum L_1=[a_1]+[c_3]+[d_4]+[(a_2),(b_1)]$, $\sum L_2=[a_1][c_3]+[a_1][d_4]+[c_3][d_4]+[(a_2)(b_1)][c_3]+[(a_2)(b_1)][d_4]$, $\sum L_3=[a_1][c_3][d_4]+[(a_2)(b_1)][c_3][d_4]$, $\{L_4\}$无。故，x_1/x_5 的分母 $=1-\sum L_1+\sum L_2\cdots=1-(a_1+c_3+d_4+a_2b_1)+a_1c_3+a_1d_4+a_2b_1c_3+a_2b_1d_4+c_3d_4-(a_1c_3d_4+a_2b_1c_3d_4)$。

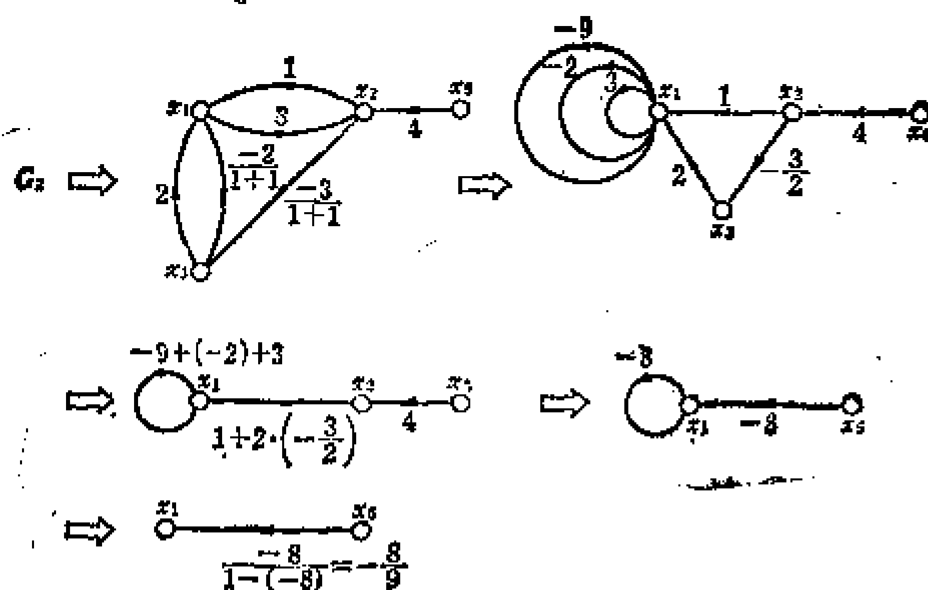
从节点 5 到节点 1 的路径 $\{P_{51}\}=\{P_1=(a_5),\ P_2=(b_5,\ a_2),\ P_3=(d_5,\ c_4,\ b_3,\ c_2)\}$, $G(P_1)$, $G(\overline{P_2})$如解图 7.3(a), (b)所示, $G(\overline{P_3})=\varnothing$为空图。所以, x_1/x_5 的分子 $=(a_5)\{1-(c_3+d_4)+c_3d_4\}+(b_5a_2)\{1-(c_3+d_4)+c_3d_4\}+(d_5c_4b_3a_2)\{1\}$。

[4] (a) $x_1/x_5=-\dfrac{3}{10}$ [解图 7.4(a)]



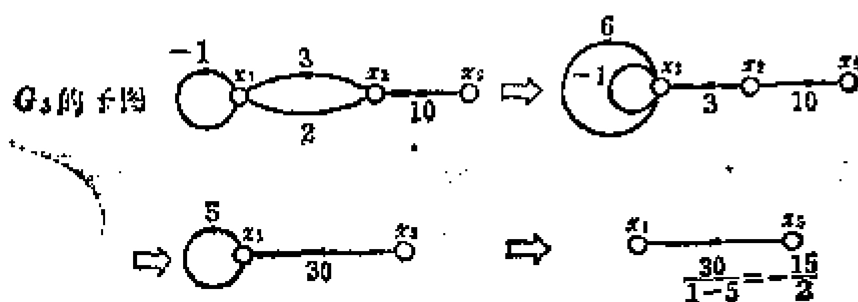
解图 7.4(a)

(b) $x_1/x_5 = -\frac{8}{9}$[解图 7.4(b)]

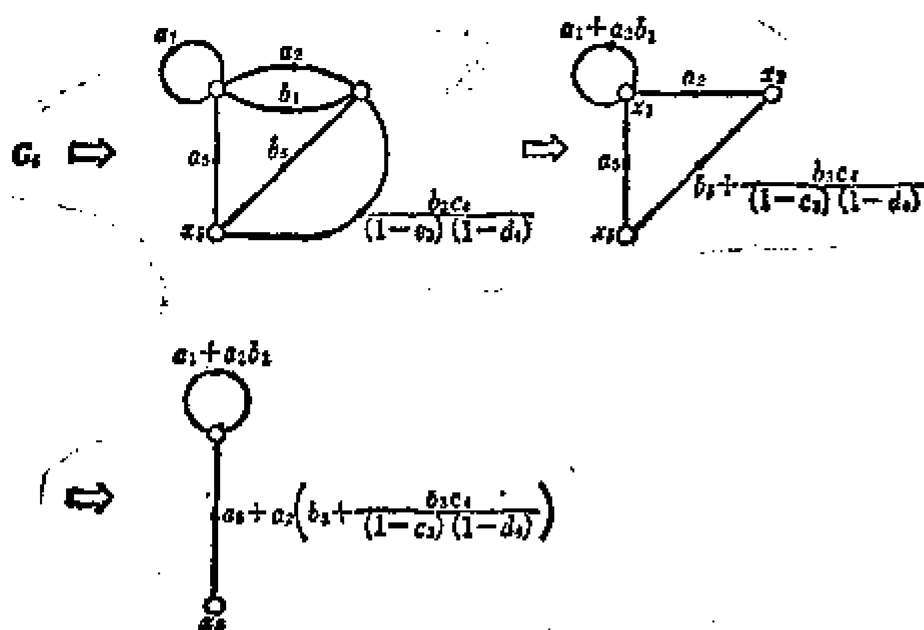


解图 7.4(b)

(c) $x_1/x_5 = -\frac{15}{2}$[解图 7.4(c)]



解图 7.4(c)

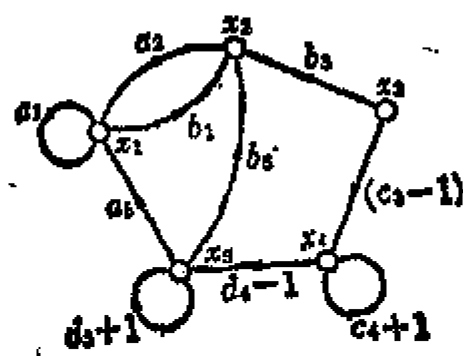


解图 7.4(d)

(d) $x_1/x_6=\dfrac{a_6+a_2\left(b_5+\dfrac{b_3c_4}{(1-c_3)(1-d_4)}\right)}{1-(a_1+a_2b_1)}$ [解图 7.4(d)]

[5] (a) x_1/x_5 的分母 $=1-\sum L_1+\sum L_2\cdots=1-\{[(-1)]+[(3)]+[(5)]+[(7)]+[(2)(4)(6)(8)]\}+[(-1)][(3)]+[(-1)][(5)]+[(-1)][(7)]+[(3)][(5)]+[(3)][(7)]+[(5)][(7)]-\{[(-1)][(3)][(5)]+[(-1)][(3)][(7)]+[(3)][(5)][(7)]\}=1-398+56-(36+105)=-482$。

另一方面，从节点 5 到节点 1 的路径仅是 $P_{51}=((9),(2))$，所以 x_1/x_5 的分子 $=(P_{51})\{G(\overline{P}_{51})$ 的 $(1-\sum L_1+\sum L_2-t\cdots)\}=(9)(2)\{1-(3+5)+3\cdot5\}=144$。所以，$x_1/x_5=-\dfrac{3}{10}$。



解图 7.5

[6] 由于以 x_6 作为输入变量，所以将方程加以变形，使方程式的左边不出现 x_3。

(a) 将第 3 式与第 4 式变成如下形式：

$$x_4=(c_3-1)x_3+(c_4+1)x_4$$

$$x_5=(d_4-1)x_4+(d_5+1)x_5$$

变形后的联立方程式所对应的信号流图如解图 7.5 所示。x_1/x_3 的分母是 $1-\sum L_1+\sum L_2\cdots=1-\{[a_1]+[c_4+1]+[d_5+1]+[(a_2)(b_1)]\}+[(a_1)][(c_4+1)]+[(a_1)][(d_5+1)]+[(a_2)(b_1)][(c_4+1)]+[(a_2)(b_1)][(d_5+1)]+[(c_4+1)][(d_5+1)]-\{[(a_1)][(c_4+1)][(d_5+1)]+[(a_2)(b_1)][(c_4+1)][(d_5+1)]=c_4d_5-a_1c_4d_5-a_2b_1c_4d_5$。

在从 x_3 到 x_1 的路径 $P_{x_3x_1}$ 上，有 $P_1=(b_3,\ a_2)$，$P_2=((c_3-1),(d_4-1),\ a_5)$，$P_3=((c_3-1),(d_4-1),\ b_5,\ a_2)$，所以，

$G(\overline{P_1})$ 的 $1-\sum L_1+\sum L_2\cdots=1-((c_4+1)+(d_5+1))+(c_4+1)(d_5+1)=c_4d_5$

$G(\overline{P_2})=\{x_3\}$，$G(\overline{P_3})=\phi$。

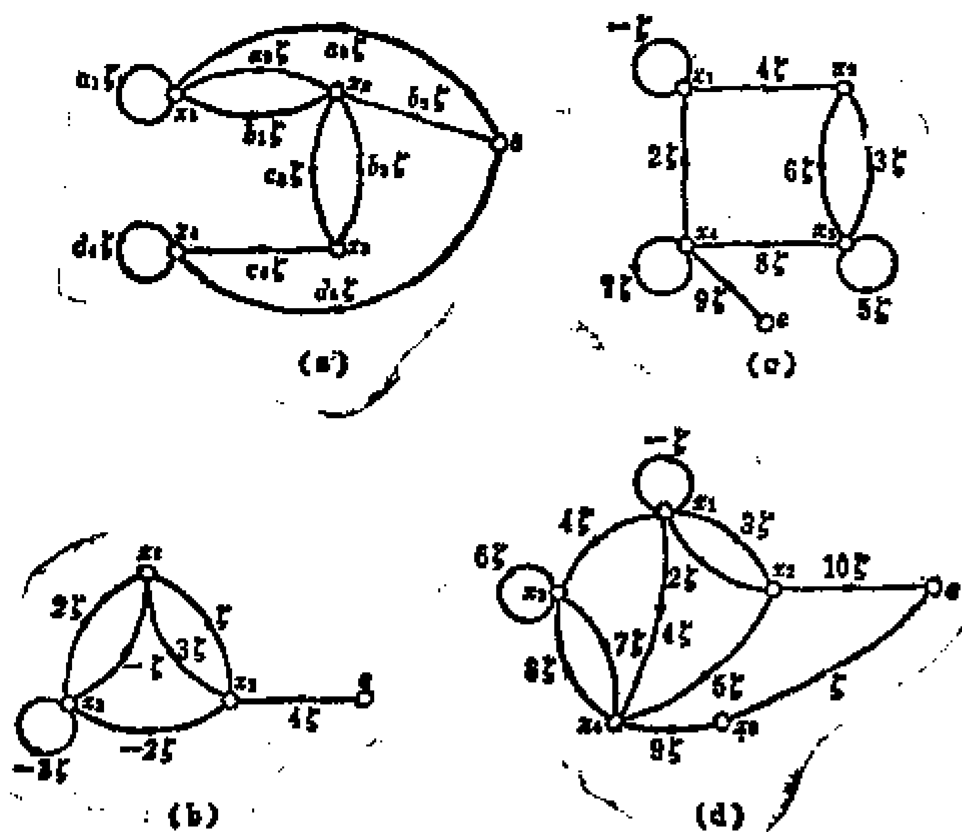
故 x_1/x_3 的分子

$\sum P_i\{G(\overline{P_i})$ 的 $1-\sum L_1+\sum L_2\cdots\}=(b_5a_2)\{c_4d_5\}+(c_3-1)(d_4-1)a_5\{1\}+(c_3-1)(d_4-1)b_5a_2\{1\}$。

[7] (a) 式(7.7)在这里为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\zeta & a_2\zeta & 0 & 0\\ b_1\zeta & 0 & b_3\zeta & 0\\ 0 & c_2\zeta & 0 & c_4\zeta\\ 0 & 0 & 0 & d_4\zeta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_5\zeta\\b_5\zeta\\0\\d_5\zeta\end{bmatrix}e$$

这个方程式的信号流图如解图 7.6(a)，完全相同。对于(b)，(c)，(d)都能写出式(7.7)的具体形式，各方程式对应的信号流图如同图(b)，(c)，(d)所示。



解图 7.6

[8] (a) 按式(7.8)，首先，G_t 的

$$1-\sum L_1+\sum L_2\cdots$$

$$=1-\{[(a\zeta)]+[(a_2\zeta)(b_1\zeta)]+[(c_2\zeta)(b_3\zeta)]+[(d_4\zeta)]\}$$

$$+[(a_1\zeta)][(c_2\zeta)(b_3\zeta)]+[(a_1\zeta)][(d_4\zeta)]$$

$$+[(a_2\zeta)(b_1\zeta)][(d_4\zeta)]-[(a_1\zeta)][(c_2\zeta)(b_3\zeta)][(d_4\zeta)]$$

$$=1-(a_1+d_4)\zeta+(a_1d_4-a_2b_1-c_2b_3)\zeta^2$$

$$+(a_1c_2b_3+a_2b_1d_4+d_4c_2b_3)\zeta^3-a_1c_2b_3d_4\zeta^4$$

因此，固有方程式为

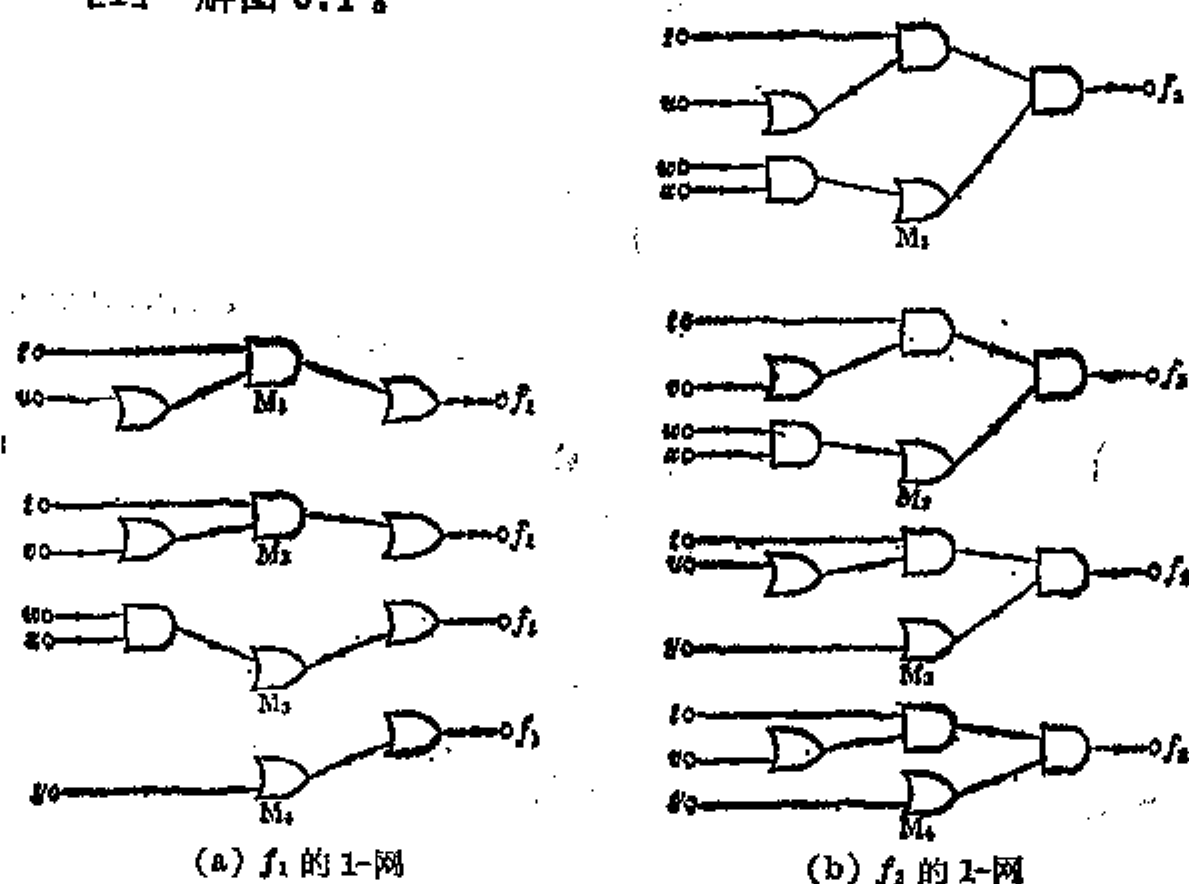
$$\lambda^n\{G_t\text{ 的}1-\sum L_1+\sum L_2\cdots\}\zeta=1/\lambda$$

$$=\lambda^4-(a_1+d_4)\lambda^3+(a_1d_4-a_2b_1-c_2b_3)\lambda^2$$

$$+(a_1c_2b_3+a_2b_1d_4+d_4c_2b_3)\lambda-a_1c_2b_3d_4=0$$

第八章

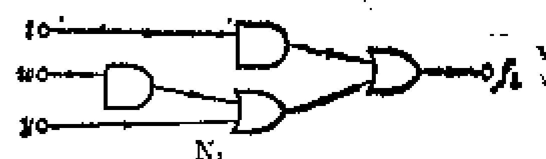
[1] 解图8.1。

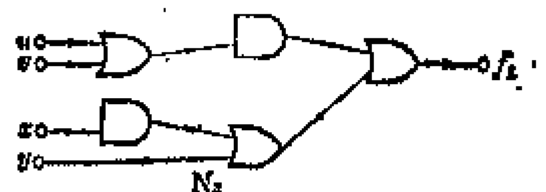


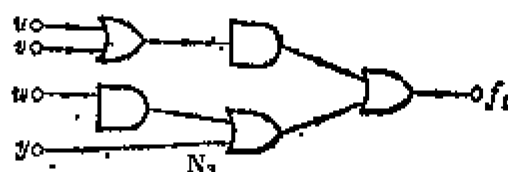
(a) f_1 的1-网　　(b) f_2 的1-网

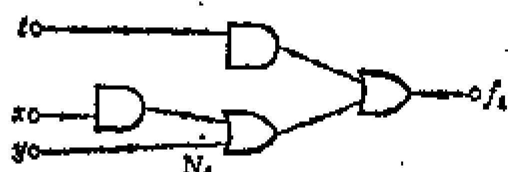
解图8.1

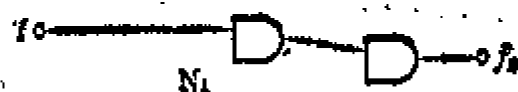
[2] 解图 8.2。

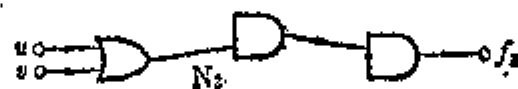










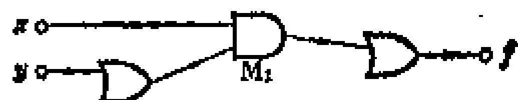


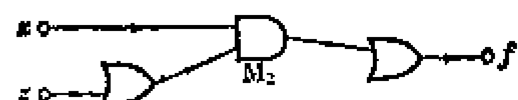
(a) f_1 的 0-网　　　(b) f_2 的 0-网

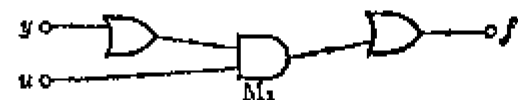
解图 8.2

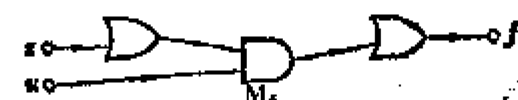
[3] 由 G_1 的 1-网(解图 8.3)的M_1，M_2，M_3，M_4,得

$$F = xy + xz + yu + zu + \bar{y}\bar{z} = \bar{x}\bar{u} + \bar{y}\bar{z}$$

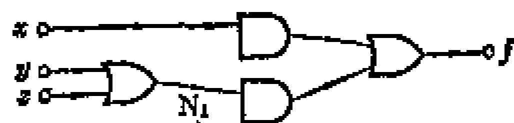


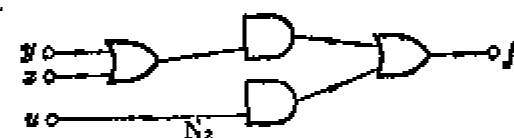


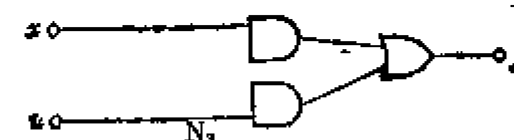


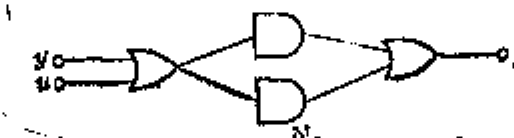


解图 8.3　G_1的 1-网









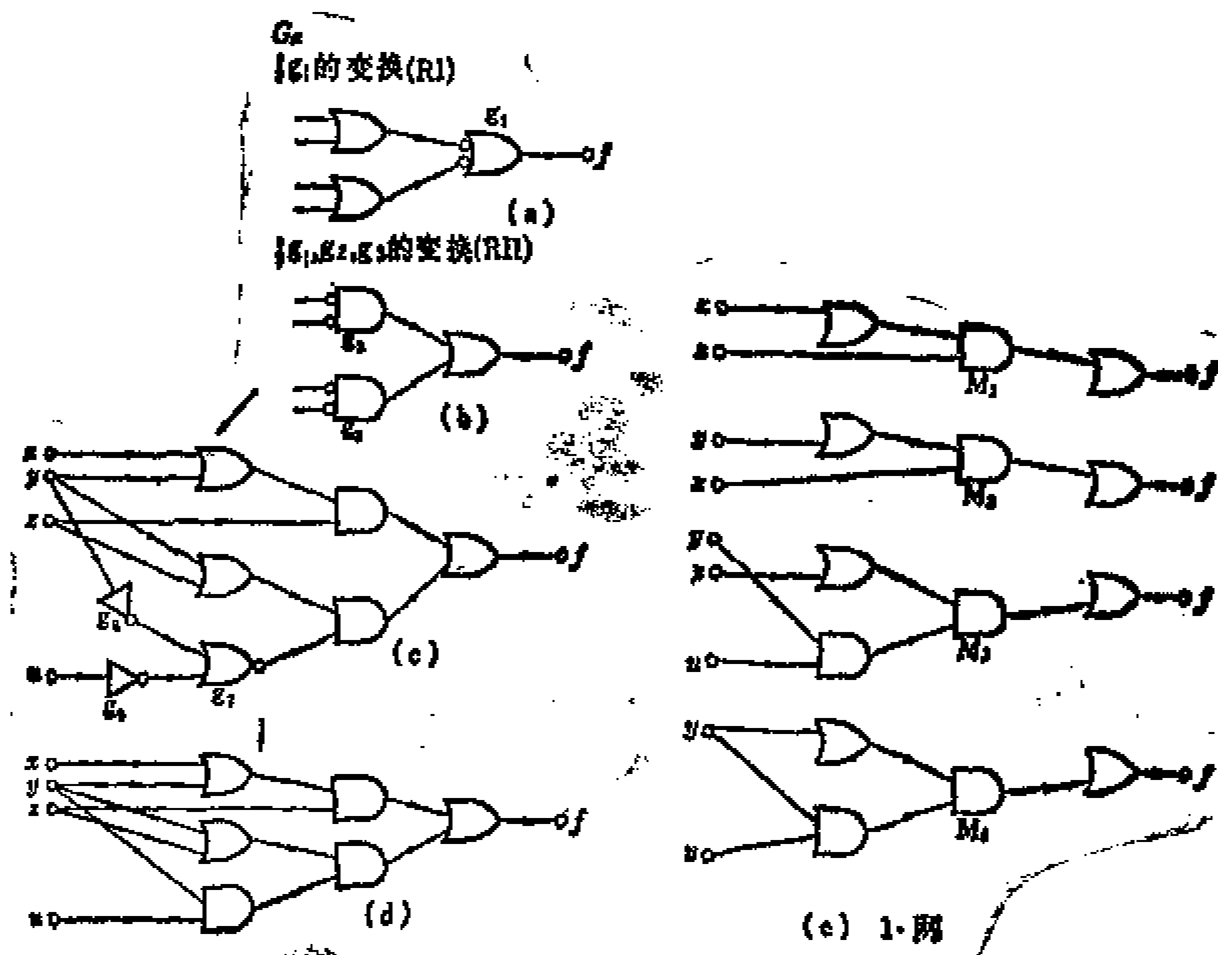
解图 8.4　G_1 的 0-网

[4]　由 G_1 的 0-网，得

$$\bar{F}=\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{y}\bar{z}\bar{u}+\bar{x}\bar{u}$$

[5]　若把 G_a 变换成仅含有与门及或门的逻辑电路，则如解图 8.5(d)所示。进而使图(d)的 1-网成为图(e)。所以

$$F=xz+yz+yzu+yu=xz+yz+yu$$



解图 8.5　G_a 的等效变换

索　引

一　画

三　画

四　画

六　画

七　画

八　画

十　画

十 一 画

十二画

十三画

十四画

十七画